## Übungen zu
## Lineare Algebra für Physiker(innen)
## 6. Übungsblatt für den 13. 11. 2017

*Von letzter Woche (Übungsgruppe Zillich):*

29. (a,b)

30.

*Neue Beispiele:*

31. Wir betrachten die Menge $M := \{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} | a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass $(M, +, \cdot)$ einen Ring bildet.

32. Wir betrachten folgende Matrizen

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, A_5 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A_6 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & -6 & -18 \end{pmatrix},$$

$$A_7 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Elementarmatrizen, die jeweils $A_i$ in $A_{i+1}$ überführen ($i \in \{1, \ldots, 6\}$).

33. Seien $E_1, \ldots, E_n \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{Q})$ Elementarmatrizen. Zeigen Sie, dass das Produkt der Matrizen $P = E_n E_{n-1} \ldots E_1$ invertierbar ist. (Hinweis: Konstruieren Sie $P^{-1}$ mit Hilfe der $E_i$ und begründen Sie die Korrektheit).

34. Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entscheiden Sie, ob die Matrizen $A$ und $B$ invertierbar sind. Wenn ja, geben Sie die dazugehörige Inverse an.

35. Gegeben ist die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{4\times 4}(\mathbb{Z}_5)$

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{2} & \overline{2} & \overline{3} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} & \overline{4} \\ \overline{3} & \overline{2} & \overline{1} & \overline{4} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{3} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie den Rang von $A$.

36. Gegeben ist die Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie invertierbare Matrizen $P$ und $Q$ so, dass $P \cdot A \cdot Q$ die Normalform von $A$ ergibt.

Hinweis: Wenden Sie auf das Schema $\begin{array}{c|c} I_3 & \\ \hline A & I_3 \end{array}$ elementare Zeilen- und Spaltenoperationen an.

37. Für $A, B \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist der Kommutator $[A, B]$ definiert als

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A.$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $A, B, C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}$ die Identität

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

gilt.

(b) Berechnen Sie die Kommutatoren $[P, Q]$, $[P, R]$ $[Q, R]$ für

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$