Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
5. Übungsblatt für den 6. 11. 2017

Von letzter Woche (Übungsgruppe Zillich):

24. (a-c)
25. (a-c)

Neue Beispiele:

26. Zeigen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist. D.h., falls ein kommutativer Ring R mit Eins und ohne Nullteiler nur endlich viele Elemente enthält, dann muss jedes Element $r \neq 0$ in R ein multiplikatives Inverses besitzen.

27. Es seien A, B, C Matrizen. Zeigen Sie:

    (ii) $(A(B+C))^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$;
    (iii) $(A^n)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

    (Satz 2.1.23 (ii) und (iii)). Wie müssen die Matrizen dimensioniert sein, damit obige Formeln jeweils sinnvoll sind?

28. Zeigen Sie, dass Rotationsmatrizen orthogonal sind:

    Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $(R_\alpha)^{-1} = (R_\alpha)^{\mathrm{T}}$.

29. Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

    (a) Mit welcher Matrix muss man A multiplizieren, um das 5-fache der 2. Zeile zur 4. Zeile zu addieren?
    (b) Mit welcher Matrix ist B zu multiplizieren, um eine Matrix zu erhalten, die sich von B dadurch unterscheidet, dass die 1. und 3. Zeile vertauscht auftreten?

30. Es bezeichne R einen kommutativen Ring mit Einselement. Berechnen Sie die Menge der 2×2 - Matrizen, die mit allen 2×2 - Matrizen (bezüglich Matrixmultiplikation) kommutieren; d.h., bestimmen Sie alle Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, welche für beliebige Werte $x, y, z, t \in R$ die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

    erfüllen.