Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
4. Übungsblatt für den 30. 10. 2017

Von letzter Woche (Übungsgruppe Zillich):

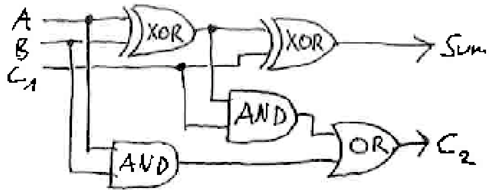
18. (b-d)
19.

Von letzter Woche (beide Übungsgruppen):

20. (a-d)
21.

Neue Beispiele:

22. Gegeben ist folgende binäre Schaltung, bestehend aus den gates XOR (exclusives oder), OR (inclusives oder), sowie AND (und):



Dabei sind A, B, und C_1 logische inputs (d.h. A$\in \{\text{true}, \text{false}\}$ bzw. A$\in \{0, 1\}$ usw) und Sum und C_2 logische outputs. Zeige mit einer Wahrheitstabelle, das diese Schaltung die binäre Addition (Sum) vom A und B ausführt, mit einem Übertrag C_2. C_1 ist ein möglicher Übertrag von einer vorherigen Addition. Wie könnte man mehrere dieser Schaltungen kombinieren, um natürliche Zahlen (in Binärdarstellung) grösser als 1 zu addieren?

23. Gegeben sei ein Quadrat in einer Ebene. Im allgemeinen wird das Quadrat anders in der Ebene liegt, wenn man es dreht oder an einer Geraden spiegelt.
    (a) Stelle eine Liste aller Symmetrieoperationen des Quadrats auf, also all jener Drehungen und Spiegelungen, bezüglich derer das Quadrat *invariant* ist. Bilden die Symmetrieoperationen des Quadrats eine Gruppe? Ist diese Gruppe abelsch?
    (b) Führe das Gleiche wie in (a) für ein Rechteck mit unterschiedlicher Kantenlänge durch. Stehen die Symmetriegruppe des Quadrats und die Symmetriegruppe des Rechtecks in einer Beziehung zueinander?

24. Sei $A_n := \{e^{2\pi ik/n} | k = 0, 1, \dots, n-1\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$.
    (a) Zeige dass A_n zusammen mit der Multiplikation eine abelsche Gruppe $(A_n, \cdot)$ bildet. Ist sie auch zyklisch?
    (b) Sei n ein Teiler von m. Zeige dass dann $(A_n, \cdot)$ eine Untergruppe von $(A_m, \cdot)$ ist. Ist $(A_n, \cdot)$ ein Normalteiler von $(A_m, \cdot)$?
    (c) Beschreibe die Faktorgruppe von A_m nach A_n.

25. Sei $G = (\mathbb{Z}, +)$ und $H = (\{1, i, -1, -i\}, \cdot)$, wobei $i = \sqrt{-1}$ wie in Bsp 24. Wie definieren die Abbildung $\varphi : G \to H$ durch $\varphi(n) = i^n$.
    (a) Ist φ ein Homomorphismus?
    (b) Bestimme den Kern von φ, $\text{kern}(\varphi)$, und das Bild $\text{im}(\varphi)$.
    (c) Gib einen Isomorphismus zwischen $G/\text{kern}(\varphi)$ und $\text{im}(\varphi)$ an.