Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
3. Übungsblatt für den 23. 10. 2017

Von letzter Woche (Übungsgruppe Zillich):

12. (a-f)
13. (a-b)

Neue Beispiele:

15. Sei U das "Universium", und $\mathcal{P}(U)$ die Potenzmenge von U. Zeige:
$$\forall A \in \mathcal{P}(U) : \exists! B \in \mathcal{P}(U) : A \cap B = \emptyset \wedge A \cup B = U$$
$\exists!$ bedeutet "es existiert *genau ein*".

16. Welche der folgenden Relationen R_i auf Mengen A_i sind Äquivalenzrelationen?
    (a) $A_1 = \mathbb{R}$ mit der Relation $R_1 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge [x] = [y]\}$, wobei $[.]$ das Abrunden auf ganze Zahlen bezeichnet.
    (b) $A_2 = \mathbb{R}$ mit der Relation $R_2 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R} \wedge x \leq y\}$.
    (c) $A_3 = \mathbb{Z}$ mit der Relation $R_3 = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{Z} \wedge (3|(x-y))\}$ (Gleichheit modulo 3).
    (d) $A_4 = \{(x,y) | x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}\}$ mit der Relation $(x,y) R_4 (x',y') :\Longleftrightarrow xy' = yx'$.

17. Bestimme die Faktormengen der Äquivalenzrelationen aus dem vorigen Beispiel.

18. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf A. Für ein $a \in A$ ist die Äquivalenzklasse definiert als $K_\sim(a) = \{b \in A | a \sim b\}$, siehe Vorlesung.
    (a) Sei $a, b \in A$. Zeige: $K_\sim(a) = K_\sim(b) \iff a \sim b$.
    (b) Sei $a, b \in A$. Zeige: $a \not\sim b \iff K_\sim(a) \cap K_\sim(b) = \emptyset$.
    (c) Zeige: $\bigcup_{a \in A} K_\sim(a) = A$
    (d) Zeige: die Äquivalenzklassen bilden eine Partition von A.

19. Sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ gleich mächtig?

20. Seien A, B, C, D Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$, und $h : C \to D$ Funktionen darauf. Zeige mit der in der Vorlesung definierten Hintereinanderausführung $\circ$:
    (a) Assoziativität: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
    (b) Sind f und g injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv.
    (c) Zu f gibt es genau dann eine inverse Funktion, wenn f bijektiv ist, und diese inverse Funktion, f^{-1}, ist eindeutig.
    (d) $(f^{-1})^{-1} = f$ und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

21. $P(a,b)$ sei irgendeine Aussage über Elemente $a \in A$ und $b \in B$, wobei A und B irgendwelche Mengen sind. Zeige oder widerlege:
$$(i) \quad \exists a \in A : \forall b \in B : P(a,b) \implies \forall b \in B : \exists a \in A : P(a,b)$$
$$(ii) \quad \forall a \in A : \exists b \in B : P(a,b) \implies \exists b \in B : \forall a \in A : P(a,b)$$