Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
2. Übungsblatt für den 16. 10. 2017

9. Zeigen Sie, die folgenden Aussagen über die Teilbarkeitsrelation ganzer Zahlen (Skriptum, Satz 1.2.6):

   (a) $k|m \wedge k|n \Rightarrow k|m+n \wedge k|m-n$;

   (b) $k|m \Rightarrow k|mn$;

   (c) $k|m \wedge m|k \Rightarrow k = \pm m$;

   (d) $k|m \wedge m|n \Rightarrow k|n$.

   Für von 0 verschiedenen natürliche Zahlen a, b gilt

   (e) $a|b \Rightarrow a \leq b$.

   Die Beispiele 10 bis 13 behandeln Beziehungen zwischen Mengen, das heißt, alle Symbole (ausgenommen Indizes) stehen für irgendwelche Mengen. Der Buchstabe U bezeichne eine Universalmenge; $\overline{A}$ ist das Komplement von A in U (i.e., $A \subseteq U$ und $\overline{A} = U \setminus A$).

10. Beweisen Sie die folgenden Aussagen (Satz 1.3.6).

    (a) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$;

    (b) $A \setminus B \subseteq A$;

    (c) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

    (d) $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$.

11. Beweisen Sie die folgenden Aussagen über die symmetrische Differenz.

    (a) $A \triangle B = B \triangle A$;

    (b) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

    (c) $A \triangle A = \emptyset$ und $A \triangle \emptyset = A$ und $A \triangle U = \overline{A}$;

    (d) $A \triangle \overline{A} = U$.

12. Beweisen Sie die folgenden Verträglichkeitsgesetze.

    (a) $A \cup (A \cap B) = A = A \cap (A \cup B)$;

    (b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

    (c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

    (d) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$;

    (e) $A \cap \bigcup_i B_i = \bigcup_i (A \cap B_i)$;

    (f) $A \cup \bigcap_i B_i = \bigcap_i (A \cup B_i)$.

13. Zeigen Sie die Gültigkeit der De Morganschen Gesetze (Satz 1.3.8):

(a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ und $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(b) $\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}$ und $\overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}$.

14. Das "Sieb des Eratosthenes":
Mit folgender Vorschrift kann man bequem alle Primzahlen bis n bestimmen:

(i) lege eine Tabelle T aller natürlichen Zahlen bis n an, beginnend mit der kleinsten Primzahl $p = 2$;
(ii) eliminiere in T alle durch p teilbaren Zahlen;
(iii) gehe zur nächsten Zahl p der (jetzt kleineren) Tabelle – falls es kein weiteres p gibt, sind wir fertig;
(iv) gehe zu (ii).

Mithilfe dieser Sieb-Methode kann man z.b. die Anzahl der Primzahlen bis n, $\pi(n)$, berechnen.

(a) Probiere dieses Sieb für nicht zu grosses n aus.

(b) *Freiwilliger Bonuspunkt:* Implementiere das Sieb als Computerprogramm. Berechne damit $\pi(n)$ numerisch und verifiziere numerisch, dass $\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n - 1}$.

(c) Das asymptotische Verhalten von $\pi(n)$ kann auch streng bewiesen werden (zu kompliziert für einen Übungszettel). Dazu benötigt man, dass die (auch in der Physik wichtige) Riemannschen Zeta Funktion $\zeta(z)$, z komplex, für $\Re e[z] > 1$ definiert werden kann über

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-z} \tag{1}$$

$\zeta(z)$ hat nämlich eine interessante Verbindung zu den Primzahlen:
Zeige, dass sich $\zeta(z)$ auch als folgendes Produkt schreiben lassen kann

$$\zeta(z) = \prod_{p \text{ prim}} \frac{1}{1 - p^{-z}}$$

Inspiriert vom obigen Sieb, gehe folgendermassen vor: dividiere Gl.(1) durch $x = 2^z$ und subtrahiere das Ergebnis von Gl.(1). Welche Terme werden dabei eliminiert? Wiederhole mit $x = 3^z$ usw. Konvergiert diese Vorschrift?