Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
12. Übungsblatt für den 22. 1. 2018

Von letzter Woche (Übungsgruppe Zillich):

65.

67.

Neue Beispiele:

68. Sei V der Vektorraum der Polynome 3. Grades, $V = \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ und $B = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ die kanonische Basis, $b_n(x) = x^n$. Gegeben ist die Bilinearform $f : V \times V \to \mathbb{R}$, $f(p,q) = \int_0^1 dx\, p(x)q(x)$. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von f bezüglich der Basis B.

69. Selbstadjungierte lineare Abbildungen spielen in der Quantenmechanik eine wichtige Rolle. Wir definieren: Sei V ein IP-Raum und h ein linearer Operator. h heisst selbstadjungiert genau dann, wenn gilt: $\forall x, y \in V : \langle x|h(y)\rangle = \langle h(x)|y\rangle$. Sei nun V der Vektorraum $\mathbb{C}_n$ mit dem kanonischen Skalarprodukt (Beispiel 5.1.3 im Skriptum) und der kanonischen Basis B. Zeigen Sie dass für die Elemente a_{ij} der Darstellungsmatrix $A \equiv A(h; B, B)$ einer selbstadjungierten linearen Abbildung h folgendes gilt:

$$\bar{a}_{ij} = a_{ji}$$

69. Anwendung der Cauchy-Ungleichung:
Wir betrachten einen Vektorraum V über $\mathbb{C}$ mit einem Skalarprodukt. Seien A und B selbstadjungierte lineare Abbildungen $V \to V$.

    (a) Zeigen Sie dass für $x \in V$ gilt

    $$\Im m\langle Ax|Bx\rangle = \frac{1}{2i}\left(\langle Ax|Bx\rangle - \langle Bx|Ax\rangle\right)$$

    wobei $\Im m z$ der Imaginärteil von einem komplexen z ist.

    (b) Zwischen den beiden Abbildungen A und B gelte nun folgende Kommutatorrelation: $[A, B] = \frac{\alpha}{i} I$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$ und I die $n \times n$ Einheitsmatrix ist, und $[A, B] := AB - BA$ (AB ist einfach die Hintereinanderausführung von A und B). Zeigen Sie mit (a), dass für ein $x \in V$ dann folgt:

    $$\Im m\langle Ax|Bx\rangle = \frac{1}{2}\alpha||x||.$$

    Wie betrachten ab jetzt nur noch normierte x, d.h. $||x|| = 1$. Zeigen Sie, dass

    $$\frac{\alpha}{2} \le ||Ax||\,||Bx||$$

    (c) Im letzten Schritt ersetzen wir in der obigen Herleitung A durch $A' = A - aI$ und B durch $B' = B - bI$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Sind die Voraussetzungen der obigen Herleitungen erfüllt? Zeigen Sie, dass also auch $\frac{\alpha}{2} \le ||A'x||\,||B'x||$ gilt.
    Wenn wir nun speziell $a = \langle x|Ax\rangle$ und $b = \langle x|Bx\rangle$ setzen, erhalten wir eine Ungleichung, die in der Quantenmechanik *Heisenbergsche Unschärferelation* genannt wird:

    $$\frac{\alpha}{2} \le ||Ax - \langle x|Ax\rangle x||\,||Bx - \langle x|Bx\rangle x||$$

    $||Ax - \langle x|Ax\rangle x||$ kann auch umgeschrieben werden in $(\langle x|A^2x\rangle - \langle x|Ax\rangle^2)^{1/2}$ und wird üblicherweise mit ΔA abgekürzt wird ("Unschärfe").

71. (a) Sei $V = C[0, 1]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Ist $||f|| = \max_{x\in[0,1]}|f(x)|$ eine Norm auf V? Falls ja, gibt es ein inneres Produkt auf V, das diese Norm erzeugt?

    (b) Wie (a) für $V = \mathbb{R}_2$ und $||(x, y)|| = x^2 + xy - y^2$.