Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
11. Übungsblatt für den 15. 1. 2018

Von letzter Woche (Übungsgruppe Zillich):

60.

61.

62.

63.

64.

Von letzter Woche (beide Übungsgruppen):

65.

Neue Beispiele:

66. Fourierentwicklung.
Gegeben ist der IP-Raum $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ (reelle Funktionen von $[0, \pi]$ nach $\mathbb{R}$) mit dem inneren Produkt $\langle f|g\rangle = \int_0^\pi dx f(x)g(x)$. Wir definieren folgende Funktionen in $C([0, 2\pi], \mathbb{R})$, wobei $k \in \mathbb{N}\backslash 0$:

$$\bar{e}(x) = 1 \ , \qquad \bar{s}_k(x) = \sin(kx) \ , \qquad \bar{c}_k(x) = \cos(kx)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen $\bar{e}$, $\bar{s}_k$, $\bar{c}_k$ ein Orthogonalsystem sind. Bilden Sie aus diesem Orthogonalsystem ein Orthonormalsystem e, s_k, c_k.

(b) Sei $S = \{e, s_1, \dots, s_n, c_1, \dots, c_n\}$ eine endliche Teilmenge des Orthonormalsystems aus (a). Die Fourierapproximation einer Funktion $f \in C([0, 2\pi], \mathbb{R})$ bezüglich des Orthonormalsystem S ist im Skriptum in 5.2.9 definiert. Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten für die Funktion

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)^2$$

Wie gut ist die Fourierapproximation für z.B. $n = 3$?

(c) **Bonusfrage:** Welches auf den trigonometrischen Funktionen sin und/oder cos basierende Orthonormalsystem wäre für die Funktion f in (b) geeigneter? Mit geeignet meinen wir, dass man mit möglichst wenigen Fourierkoffizienten eine gute Approximation von f bekommt.

67. Sei V ein IP-Raum. Zeigen Sie, dass für $x, y \in V$ gilt: $||x + y|| \ \geq \ |\,||x|| - ||y||\,|$.

68. Seien $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise verschiedene und $y_0, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass es genau ein Polynom $p(x) \in \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ gibt, das diese Koordinaten (x_i, y_i) interpoliert, sodass also gilt: $\forall 0 \leq k \leq n : p(x_k) = y_k$.
Hinweis: Vandermonde Determinante.