Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
10. Übungsblatt für den 8. 01. 2018

58. In der Quantenmechanik werden Sie den Zeitentwicklungsoperator $\exp[-itH]$ kennenlernen, wobei $t \in \mathbb{R}$ die Zeit und H eine lineare Abbildung, bzw. in einer Basisdarstellung eine Matrix ist. In sehr einfachen Fällen kann $\exp[-itH]$ ausgerechnet werden:
Berechnen Sie $\exp[-it\sigma_x]$ für die Pauli-Spinmatrix

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von σ_x.

59. Gegeben sei die Kurve κ in R^2

$$\kappa = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 4\}.$$

Bestimmen Sie die Gleichung von κ im um den Nullpunkt um den Winkel $\pi/6$ gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Koordinatensystem.

60. Es sei $V = \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller reellen Polynome vom Grad kleiner oder gleich $n > 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$p \mapsto \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, p(x)dx$$

ein Element des Dualraums $V^\star$ ist.

61. Es sei v ein Eigenvektor einer quadratischen Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie:
   (a) v ist ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2.
   (b) Ist A invertierbar, dann ist v Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}

62. Es sei $V = C^\infty(\mathbb{R})$ der Vektorraum aller glatten Funktionen, und $d\colon V \longrightarrow V$ der Differentialoperator $f \mapsto \frac{df(x)}{dx}$. Weiters sei W der von den Funktionen $b_k\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $b_k(x) = x^k e^k$ $(k \in \{0, 1, 2\})$ aufgespannte Teilraum von V.
   (a) Zeigen Sie, dass $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ eine Basis von W ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $d(W) \subseteq W$.
   (c) Berechnen Sie $\mathcal{A}(d, B, B)$.
   (d) Bestimmen Sie $\ker(d)$ und $\mathrm{im}(d)$.

63. Es sei A eine $n \times n$-Matrix in oberer Dreiecksform ($a_{ij} = 0$ für $i > j$). Zeigen Sie
   (a) durch Induktion nach n;
   (b) mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel, dass dann

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

64. Sei V ein innerer Produktraum über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für jedes $v \in V$ die Abbildung $\alpha_v\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha_v(x) = \langle x|v\rangle$ ein Element des Dualraums $V^\star$ ist.

65. Auf dem Vektoraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ definiert die Formel

$$\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

ein inneres Produkt. Berechnen Sie eine Basis für den Unterraum der Polynome, die normal auf $p_1 = 1$ und auf $p_2 = x$ stehen.