Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
1. Übungsblatt für den 9. 10. 2017

Die folgenden Beispiele behandeln elementare Eigenschaften natürlicher Zahlen, die Sie beweisen sollen. Die Formeln und Gleichungen sind so zu verstehen, dass sie für alle Belegungen der freien Variablen mit natürlichen Zahlen gelten sollen; zum Beispiel bedeutet die Gleichung von Beispiel 1 ausgeschrieben

$$\forall k \in \mathbb{N} : k \neq S(k).$$

Um die Formeln zu beweisen, gehen Sie aus von den Peano Axiomen. Manche Eigenschaften können Sie mittels Induktion zeigen, andere direkt ohne Anwendung des Induktionsprinzips.

Die Beispiele sind aufsteigend so gewählt, dass Sie sie nacheinander beweisen können, wobei Sie eine bereits bewiesene Eigenschaft in späteren Beweisen verwenden dürfen.

In den eckigen Klammern finden Sie Anleitungen, die Sie befolgen können, aber nicht müssen; wenn Sie eine alternative (korrekte) Beweismethode finden, ist das in Ordnung.

1. $k \neq S(k)$ [Induktion]
2. $k \neq 0 \Rightarrow k + l \neq 0$ [Induktion nach l]
3. $k + l = 0 \Rightarrow k = 0 \wedge l = 0$ [direkt mit Hilfe von 2.]
4. $k + l = k + m \Rightarrow l = m$ [Induktion nach k]
5. Die Anordnung natürlicher Zahlen ist definiert als

   $$k \leq l :\iff \exists j \in \mathbb{N} : k + j = l.$$

   Zeigen Sie, dass für diese Relation gilt:

   (a) $n \leq n$ (Reflexivität);
   (b) $k \leq l \wedge l \leq m \Rightarrow k \leq m$ (Transitivität);
   (c) $k \leq l \wedge l \leq k \Rightarrow k = l$ (Antisymmetrie) [direkt mittels 4. und 3.] [1]
6. $k = 0 \vee 1 \leq k$ [Induktion]

Diese Beispiele mögen gezeigt haben, dass - auch intuitiv offensichtliche - Eigenschaften des natürlichen Zahlensystems aus den Peaonaxiomen formal herleitbar sind.

Für die folgenden Aufgaben (und in alle Zukunft) geben wir den diesen vorigen Beispielen anhaftenden formalistischen Standpunkt zugunsten eines die Intuition mitberücksichtigenden auf. Das heißt, Sie können die üblichen arithmetischen Gesetzmäßigkeiten verwenden.

[1] Sie haben hiermit bewiesen, dass $\leq$ eine partielle Ordnung auf der Menge $\mathbb{N}$ ist.

7. Zeigen Sie mit Induktion:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}\colon\ \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$.

8. Es seien a, b beliebige Zahlen. Zeigen Sie den binomischen Lehrsatz

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (n \in \mathbb{N}).$$