Übungen zu
Lineare Algebra für Physiker(innen)
0. Übungsblatt für den 2. 10. 2017

1. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$ax + 2y = 0,\; 2x + ay = 0.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ gibt es mehr als eine Lösung?

2. (a) Zeichnen Sie in die Ebene alle Punkte (x, y) ein, welche die Gleichung

$$3x + 2y = 6$$

erfüllen. Dasselbe für die Gleichung

$$2x + 4y = 6.$$

(b) Was passiert, wenn anstatt der zweiten Gleichung eine der Gleichungen

$$6x + 4y = 6 \quad \text{bzw.} \quad 6x + 4y = 12$$

verwendet wird? Warum ist das so? Was bedeutet dies für die Lösung des gesamten Gleichungssystems?

(c) Lösen Sie diese Gleichungssysteme rechnerisch.

3. Ein Buch über Lineare Algebra koste 34 Euro, eines über Analysis 38 Euro. Wieviele dieser Bücher müssen Sie kaufen, um ein vorhandenes Budget von 1000 Euro voll auszunützen? Was ändert sich, wenn Sie einen Euro mehr zur Verfügung haben?

4. Eine Gerade im Raum enthält die Punkte $(1, 2, 3)$ und $(3, 2, 5)$. Finden Sie 3 weitere Punkte auf dieser Geraden. Enthält sie den Nullpunkt?

5. (a) Beweisen Sie: Für 2×2-Matrizen A, B und Spaltenvektoren $(x, y)^T \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$A\left(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (AB)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie 2×2-Matrizen A und B so, dass $AB \neq BA$.

6. Beweisen Sie direkt aus den Peanoaxiomen und Definition 1.2.1 sowie den im Anschluss daran bewiesenen Sätzen im Skriptum, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt: $n + n$ ist gerade. Als Definition von *gerade* verwenden Sie die beiden Eigenschaften

- 0 ist gerade;
- Wenn n gerade ist, dann auch $S(S(n))$.

7. Zeigen Sie mit Induktion:

   (a) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$.

8. (a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

   Welche Bedingung muss x dabei erfüellen? Was erhält man, wenn x diese Bedingnung nicht erfüllt?

   (b) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ mithilfe von (a) (Hinweis: geeignetes Differenzieren).

   (c) Anwendungsbeispiel:
   In der Festkörperphysik werden Ihnen oft folgende Summen begegnen:

$$S(m, L) = \sum_{n=0}^{L-1} e^{2\pi i n m/L}$$

   wobei m und L natürliche Zahlen sind. Berechnen Sie $S(m, L)$ mithilfe von (a).