Name: ....

Matr.Nr.: ....

Stud.Kennz.: ....

Klausur
“Lineare Algebra für Physiker(innen)” (326.017)
30.1.2018

Bitte folgendes beachten:

- *Schriftliche Unterlagen sowie elektronische Geräte dürfen NICHT zur Klausur verwendet werden.*
- *Tragen Sie – noch bevor Sie zu arbeiten beginnen — auf dem Angabenblatt Ihren Namen, Matrikelnummer und Studienkennzahl ein. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie verwenden, links oben Ihren Namen.*
- *Geben Sie das ausgefüllte Angabenblatt zusammen mit Ihren Lösungen ab. Sie finden das Angabenblatt demnächst im Netz.*
- *Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt (oder mehrere), und geben Sie Ihre Lösungen nach Aufgabennummern geordnet ab, also beginnend mit der ersten Aufgabe.*

Alle Antworten sind zu begründen; ein simples “ja/nein” reicht nicht.

(1) Sei A die folgende Matrix über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Hermite-Matrix H_A zur Matrix A, sowie den Rang von A.
(b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $A \cdot x = 0$.
(b) Für $b_1 = (1,2,1)^T, b_2 = (1,1,1)^T$ bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $A \cdot x = b_i$.

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n über $\mathbb{R}$. Sowohl $B = (1, x, x^2)$ als auch $C = (1, x-1, (x-1)^2)$ sind geordnete Basen von $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$. Sei d die Differentiationsabbildung

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \\ & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 & \mapsto & a_1 + 2a_2 x \end{array}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen von d bzgl. B als auch bzgl. C, also

$$\mathcal{A}(d, B, B) \qquad \text{sowie} \qquad \mathcal{A}(d, C, C)\ .$$

umblättern !

(3) Sei A eine reelle 3×3 Matrix, und f die folgende lineare Abbildung vom Spaltenraum $\mathbb{R}_3$ nach $\mathbb{R}_3$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_3 \\ & x & \mapsto & A \cdot x \end{array}$$

Gibt es für die Matrizen in (a) und (b) eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}_3$ bzgl. derer die Darstellungsmatrix von f eine Diagonalmatrix ist; ist also A diagonalisierbar? Wenn ja, wie sieht so eine Basis aus?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(4) Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ zusammen mit dem kanonischen inneren Produkt $\langle x|y\rangle$.

(a) Bestimmen Sie mittels des Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozesses eine Orthonormalbasis $C = (y_1, y_2, y_3)$ für den von

$$x_1 = (1,1,1,1),\ x_2 = (1,0,1,0),\ x_3 = (0,-1,0,1)$$

aufgespannten Teilraum W.

(b) Bestimmen Sie dasjenige $w \in W$, welches dem Vektor $u = (1,2,2,1)$ am nächsten ist.

(5) Betrachten Sie die symmetrische Bilinearform

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) & \mapsto & (x_1,x_2) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Sei q die zu f gehörige quadratische Form auf $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie das Maximum von q auf dem Einheitskreis. Für welche (x_1, x_2) wird dieses Maximum angenommen?