Übungsblatt 10

Besprechung am **19.1.2017**

Aufgabe 1 Für welche $x \in \mathbb{R}$ existiert die Ableitung $f'(x)$? Berechnen Sie diese.

a) $f(x) = \tan x + \frac{1}{\cos x}$ b) $f(x) = \cos^2(\sqrt{x})$
c) $f(x) = x^{x+1}$ d) $f(x) = \log(\sin(x))$

Aufgabe 2 Zeigen Sie Satz 7.3 Punkt 3 aus der Vorlesung: Seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b). Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar auf (a,b) und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

für $x \in (a,b)$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie Satz 7.4 aus der Vorlesung: Seien $f : (a,b) \to (c,d)$ und $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf (a,b) bzw. (c,d). Dann ist $g \circ f$ differenzierbar auf (a,b) und für alle $x \in (a,b)$ gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Aufgabe 4 Seien $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ und $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ k-mal differenzierbar, zeigen Sie fg ist k-mal differenzierbar mit

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(k-i)} g^{(i)}.$$

Aufgabe 5 Berechnen Sie die 1000. Ableitung von $f(x) := x^3 \sin(x)$.

Aufgabe 6 Zeigen Sie Satz 7.6 aus der Vorlesung: Sei $f : (a,b) \to (c,d)$ bijektiv und differenzierbar und es gelte $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist $f^{-1}(x)$ differenzierbar auf (a,b) und für alle $x \in (a,b)$ gilt

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Berechnen Sie $(\sin^{-1})'(x)$ für $x \in (-1,1)$.

Aufgabe 7 Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos\frac{x}{2}}{1 - \cos x} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x - \cos x}{x + \cos x}.$$