Übungsblatt 8

Besprechung am **1. 12. 2016**

Aufgabe 1 Seien $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ and $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ zwei konvergente Reihen, und sei $c \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}(a_j + b_j) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j + \sum_{j=0}^{\infty} b_j,$

b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}(a_j - b_j) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j - \sum_{j=0}^{\infty} b_j,$

c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} c a_j = c \sum_{j=0}^{\infty} a_j.$

Aufgabe 2 Berechnen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 2n}.$$

Aufgabe 3 Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^n + 1}$ wobei $r > 1$.

Aufgabe 4 Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$

Aufgabe 5 Welche der folgenden Reihen sind konvergent?

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - \sin(2n)}{n!}$

b) $\displaystyle\frac{2}{5} + \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 8} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 14}{5 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 14} + \dots$

Aufgabe 6 Sei $q(x)$ eine rationale Funktion (d. h., der Quotient zweier Polynomfunktionen). Wir nehmen an, dass $q(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert ist. Begründen Sie, warum das Quotientenkriterium *nichts* über die Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} q(n)$$

aussagen kann.

Aufgabe 7 Sei die Folge $(a_n)_{n\geqslant 1}$ rekursiv definiert durch

$$a_1 = 2 \qquad \text{und} \qquad a_n = \frac{n+3}{2n-1} a_{n-1} \quad \text{für } n \geqslant 2.$$

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n?$$