Übungsblatt 7

Besprechung am **24. 11. 2016**

Beweisen Sie den folgenden Satz aus der Vorlesung: Jede nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ besitzt ein Supremum.

Aufgabe 1 Erster Teil des Beweis: Sei T eine obere Schranke von $(a_n)_{n\geqslant 1}$, und sei die Folge $(T_n)_{n\geqslant 1}$ definiert als

$$T_n = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

Zeigen Sie, dass dann $T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T$.

Aufgabe 2 Zweiter Teil des Beweis: Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} T_n = T_0$ existiert und dass gilt $T_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Aufgabe 3 Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge mit der Eigenschaft $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Aufgabe 4 Sei $(a_n)_{n\geqslant 1}$ eine Folge. Zeigen Sie wenn $(a_n)_{n\geqslant 1}$ konvergiert, dann existiert auch $\limsup_{n\to\infty} a_n$ und es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 5 Berechnen sie $\limsup_{n\to\infty} a_n$ für

a) $a_n = 1 + (-1)^n + \frac{1}{n}$, b) $a_n = n(10+n)^{-1/2}$, c) $a_n = (-1)^n/n$.

Aufgabe 6 Für welche $r \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(r^n)_{n\geqslant 1}$ konvergent, divergent gegen ∞ oder $-\infty$, oder divergent?

Aufgabe 7 Für welche $r \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} r^i$$

und was ist die Summe?