Übungsblatt 6

Besprechung am **17.11.2016**

Aufgabe 1 Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Aufgabe 2 Es seien $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ Folgen in $\mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$ und $N \in \mathbb{N}$. Es gelte

$$\forall k \geq N : a_k \leq c_k \leq b_k.$$

Zudem weiß man, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = u.$$

Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ konvergiert und $\lim_{n\to\infty} c_n = u$.

Aufgabe 3 Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $\frac{n!}{n^n}$.

Aufgabe 4 Berechnen Sie den Grenzwert der Folge $a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$.

Aufgabe 5 Zeigen Sie: Die Folge

$$\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n\geq 1}$$

ist monoton wachsend.

Aufgabe 6 Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ ist gegeben durch die Rekursion

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -1, \quad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \text{ für } n \geq 1.$$

Finden Sie eine geschlossene Darstellung für a_n.

Aufgabe 7 Beweisen Sie die folgenden Sätze über konvergente Folgen.

a) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.

b) Wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

Aufgabe 8 Beweisen Sie mittels der Vollständigkeit der Menge der reellen Zahlen, dass eine reelle Zahl $\sqrt{2}$ existiert.