Übungsblatt 5

Besprechung am **10.11.2016**

Aufgabe 1 Es seien x, y beliebige reelle Zahlen. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} |x+y| &\leq |x|+|y|; \\ ||x|-|y|| &\leq |x-y|. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Für natürliche Zahlen n,k bezeichnet der Ausdruck $\binom{n}{k}$ den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Es seien a, b beliebige reelle Zahlen. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Aufgabe 3 Beweisen Sie den folgenden Satz:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \sqrt{n} \in \mathbb{N} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}).$$

Aufgabe 4 Für einen Punkt $a = (a_1, a_2)$ der Ebene $\mathbb{R}^2$ und eine reelle Zahl $r > 0$ bezeichne $U_r(a)$ die offene Kugel vom Radius r um a

$$U_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} < r\}.$$

Zeigen Sie, dass es um jeden Punkt $x \in U_r(a)$ eine offene Kugel um x mit einem (von x abhängigen) Radius $\varepsilon > 0$ gibt, die ganz in $U_r(a)$ enthalten ist, dass also gilt

$$\forall x \in U_r(a)\, \exists \varepsilon > 0\colon U_\varepsilon(x) \subseteq U_r(a).$$

Aufgabe 5 Zeigen Sie: $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists q \in \mathbb{Q}\colon |x-q| < \varepsilon$
(Die rationalen Zahlen liegen dicht in $\mathbb{R}$).

Aufgabe 6 Beweisen Sie: $\forall \varepsilon > 0\, \exists n \in \mathbb{N}\, \forall k \geq n\colon \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Aufgabe 7 Untersuchen Sie, ob diese Folgen für $n > 0$ konvergieren, und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

$$a_n = n - \frac{n^2+n+1}{n} \qquad b_n = \frac{5}{2n} + \frac{n}{n+2} \qquad c_n = \frac{\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{2}}{\sqrt{2(n^2+n+1)}}.$$

Aufgabe 8 Berechnen Sie die folgenden Limiten

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right).$$