Übungsblatt 3

Besprechung am **27.10.2016**

Aufgabe 1 Zeigen Sie das folgende Lemma aus der Vorlesung. Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} a &\leq a && \text{(reflexiv)}, \\ a \leq b \wedge b \leq c &\Longrightarrow a \leq c && \text{(transitiv)}, \\ a \leq b \wedge b \leq a &\Longrightarrow a = b && \text{(antisymetrisch)}, \\ a \leq b &\vee b \leq a && \text{(lineare Ordnung)}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 Sind folgende Relationen lineare Ordnungsrelationen auf der Menge $M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (überprüfen Sie *alle* Eigenschaften)

a) $(x, y) \preceq (u, v) :\Longleftrightarrow x \leq u \vee y \leq v$.

b) $(x, y) \preceq (u, v) :\Longleftrightarrow x \leq u \wedge y \leq v$.

Aufgabe 3 Sei $\mathbb{K}$ mit $+, \cdot$ ein geordneter Körper. Zeigen Sie:

a) $\forall a, b, c, d \in \mathbb{K} : (a \leq b \wedge c \leq d \Longrightarrow a + c \leq b + d)$.

b) $\forall a \in \mathbb{K} : (a > 0 \Longrightarrow -a < 0)$.

c) $\forall a \neq 0 : a^2 > 0$; insbesondere: $1 > 0$.

Aufgabe 4 Sei $\mathbb{K}$ mit $+, \cdot$ ein geordneter Körper. Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

a) $a \leq b \wedge c \geq 0 \Longrightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$.

b) $a \leq b \wedge c \leq 0 \Longrightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$.

c) $0 < a \leq b \Longrightarrow a^2 \leq b^2$.

Aufgabe 5 Es gelte $0 < a_1, a_2, \ldots, a_n < 1$. Verallgemeinern Sie die Bernoull'ische Ungleichung zu

$$(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n) \geq 1 - a_1 - a_2 - \cdots - a_n.$$

Aufgabe 6 Es seien $b, c > 0$. Grenzen Sie die drei Fälle derjenigen $a \in \mathbb{R}$ von einander ab, für welche

$$\frac{a + b}{b + c} \text{ kleiner, größer bzw. gleich } \frac{a}{b}.$$

Aufgabe 7 Zeigen Sie, dass die Menge $M := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist, indem Sie eine Bijektion explizit angeben.