Übungen Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2016**

Übungsblatt 2

Besprechung am **20. 10. 2016**

Aufgabe 1 Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Jede rationale Zahl $\frac{k}{n} \in \mathbb{Q}$ lässt sich als a) endliche Dezimalzahl oder b) periodische Dezimalzahl schreiben; die Länge der Periode ist kleiner als n. (Hierbei zählt $\overline{0}$ nicht als Periode.)

Aufgabe 2 Beweisen Sie den Satz aus der Vorlesung: Jede periodische Zahl lässt sich als Bruch schreiben.

(Tipp: Verwenden Sie die geometrische Summenformel $\sum_{j=0}^{\infty} 10^{-aj} = \frac{1}{1-10^{-a}}$ für $a \in \mathbb{N}$.)

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass $\sqrt{7}$ keine rationale Zahl ist.

Aufgabe 4 Beweisen Sie, dass die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ abzählbar sind.

Aufgabe 5 Welche der folgenden Funktionen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

a) $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) $\cos\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$

c) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $n \mapsto n + 1$

d) $g\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x - 1$

e) $h\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

Aufgabe 6 Seien $f\colon A \to B$ and $g\colon B \to C$ zwei Funktionen. Zeigen Sie:

a) Wenn f und g injektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

b) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.

c) Wenn f und g bijektiv sind, dann ist auch $g \circ f$ bijektiv.

Wie üblich ist dabei $g \circ f$ definiert als diejenige Funktion, die x auf $g(f(x))$ abbildet.

Aufgabe 7 Sei $f\colon A \to B$ eine Funktion. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann injektiv, wenn für alle Funktionen $h_1, h_2\colon X \to A$ aus $f \circ h_1 = f \circ h_2$ folgt $h_1 = h_2$.

b) f ist genau dann surjektiv, wenn für alle Funktionen $g_1, g_2\colon B \to Y$ aus $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ folgt $g_1 = g_2$.

Wie üblich ist dabei $g \circ f$ definiert als diejenige Funktion, die x auf $g(f(x))$ abbildet.