

Übungsblatt 1

Besprechung am 13. 10. 2016

Aufgabe 1 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

Aufgabe 2 Sei $r \neq 1$. Zeigen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion, dass für alle $n \geq 0$ gilt

$$\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Aufgabe 3 Sei $x > 1$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Aufgabe 4 Sei x eine von Null verschiedene Zahl und $n \geq 0$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke mittels der Potenzrechenregeln:

a) $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$

d) $\frac{(6x^3)^4}{2x^5}$

b) $x^8(2x)^4$

e) $\frac{x^{2n} \cdot x^{3n-1}}{x^{n+2}}$

c) $x(3x^2)^3$

Aufgabe 5 Sei K ein Körper und seien $a, b \in K$ sowie $c, d \in K$ mit $c \neq 0$ und $d \neq 0$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Körper. Gehen Sie dabei wie in der Vorlesung vor, indem Sie nur ein Axiom pro Schritt anwenden.

a) 1 ist eindeutig bestimmt

c) $-a = (-1) \cdot a$

b) c^{-1} ist eindeutig bestimmt

d) $-(ab) = (-a)b = a(-b)$

Aufgabe 6 Sei K ein Körper und seien $a, b \in K$ sowie $c, d \in K$ mit $c \neq 0$ und $d \neq 0$. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für Körper. Gehen Sie dabei wie in der Vorlesung vor, indem Sie nur ein Axiom pro Schritt anwenden.

a) $c^{-1}d^{-1} = (cd)^{-1}$

b) $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad + bc}{cd}$

(Hierbei ist wie üblich $\frac{a}{c} := ac^{-1}$.)

Aufgabe 7 Zeigen Sie, dass $K = \{0, 1\}$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

einen Körper bildet.