8.C. Extremwertberechnung

Satz 31. Für $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $\xi \in D$ gelte:

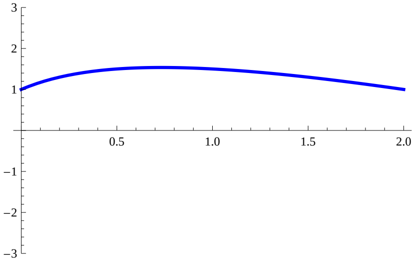
- f ist zweimal partiell db auf D
- ξ ist ein innerer Punkt von D
- Die zweiten Ableitungen von f sind stetig in ξ
- $\nabla f(\xi) = (0, \ldots, 0)$

Weiter sei $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} f(\xi) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_1} f(\xi) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n} f(\xi) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

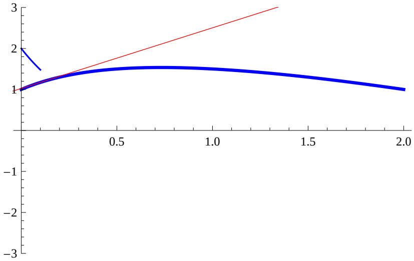
Dann gilt:

1. Sind alle Eigenwerte von H positiv, so ist ξ ein Minimum.
2. Sind alle Eigenwerte von H negativ, so ist ξ ein Maximum.
3. Hat H sowohl positive als auch negative Eigenwerte, so ist ξ kein Extremum.

Der eindimensionale Fall

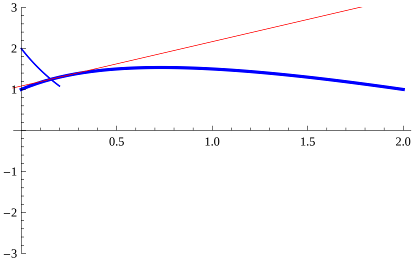


Der eindimensionale Fall



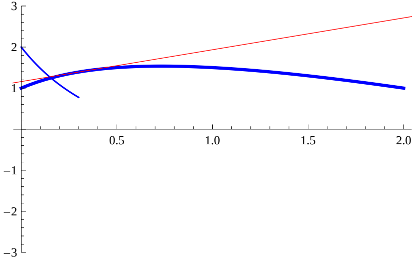
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



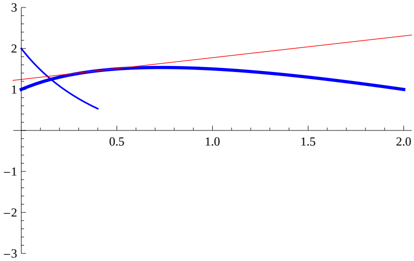
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



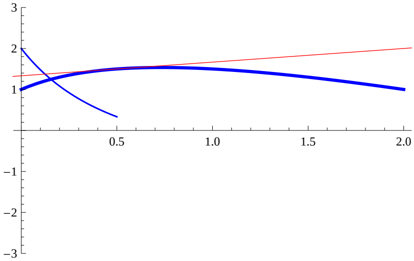
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



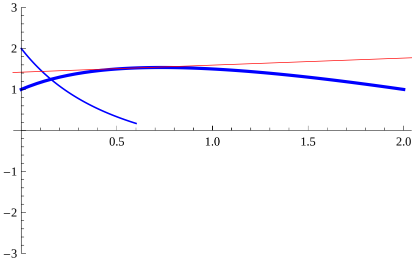
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



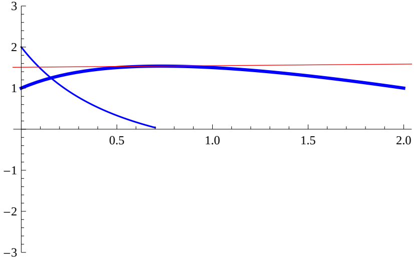
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



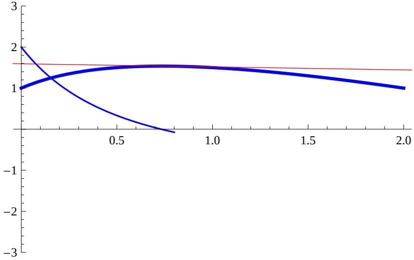
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



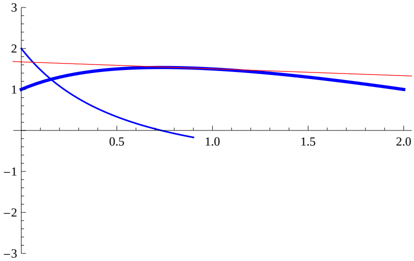
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



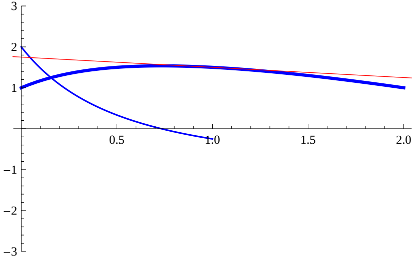
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



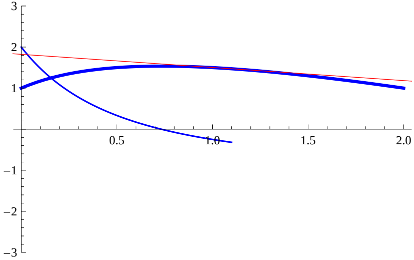
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



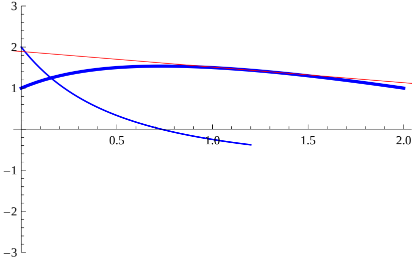
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



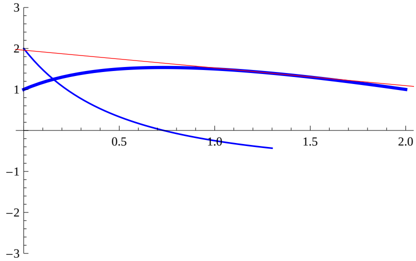
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



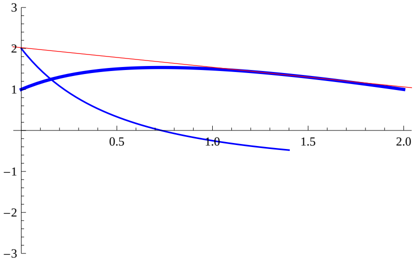
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



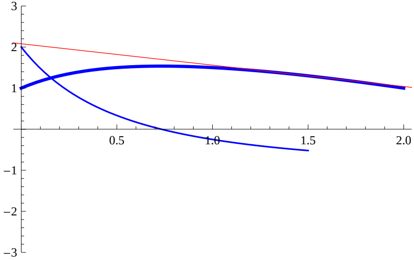
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



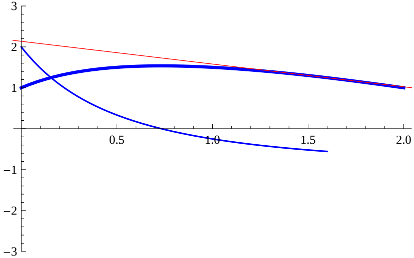
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



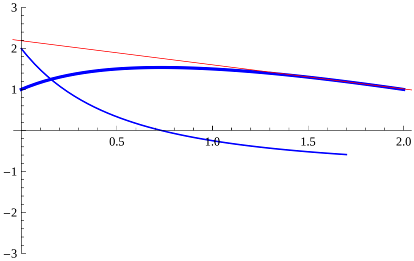
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



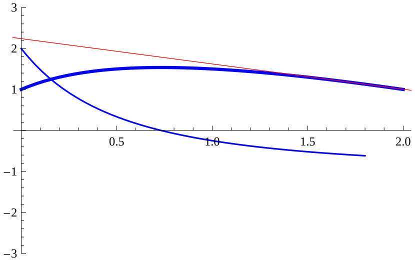
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



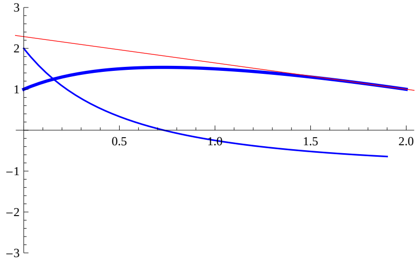
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



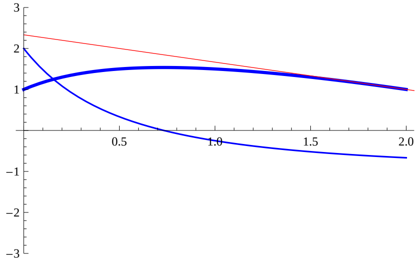
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



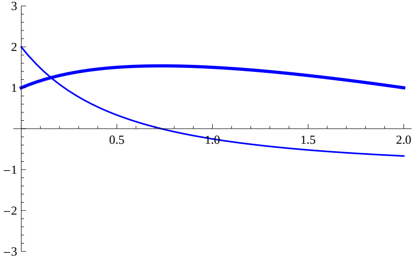
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



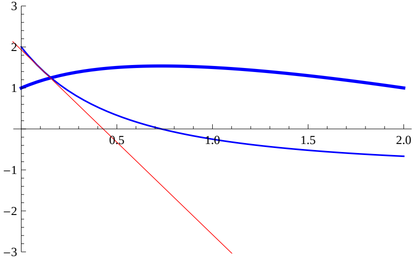
Erste Ableitung = Steigung.

Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

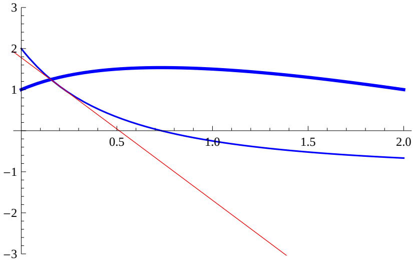
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

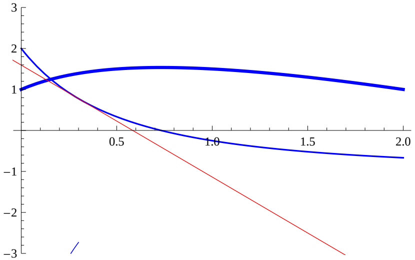
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

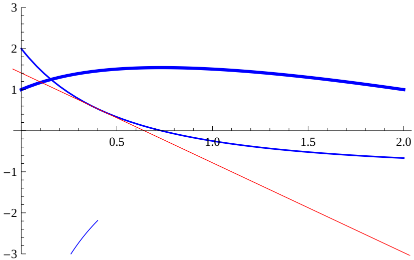
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

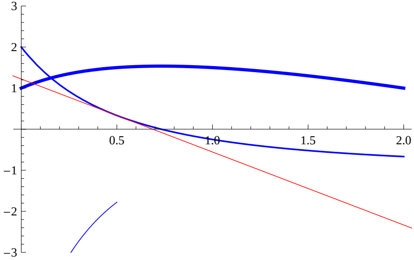
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

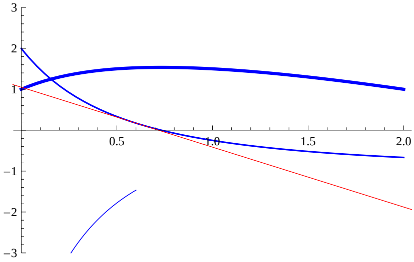
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

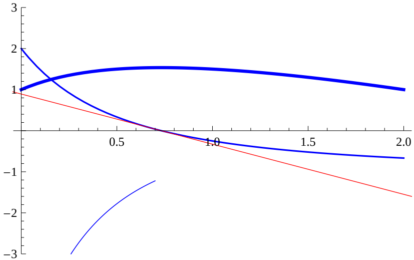
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

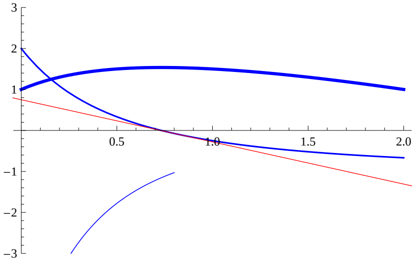
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

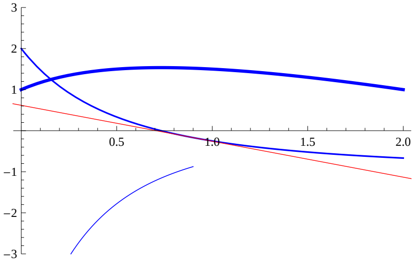
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

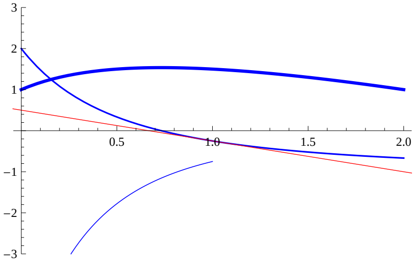
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

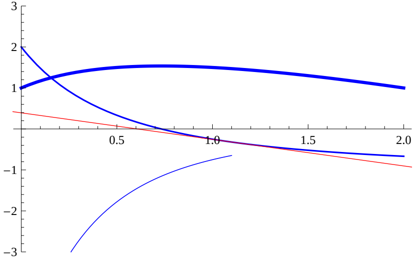
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

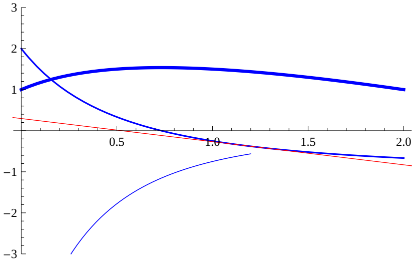
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

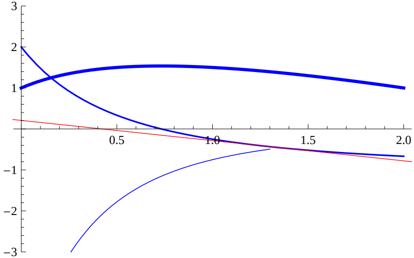
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

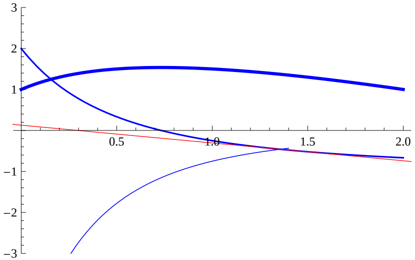
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

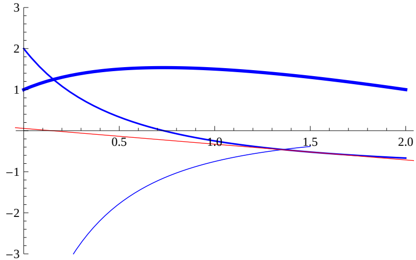
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

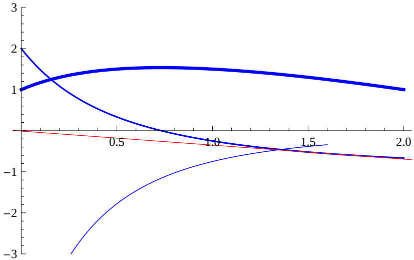
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

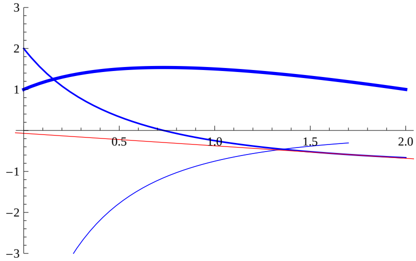
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

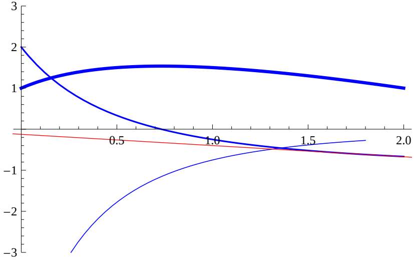
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

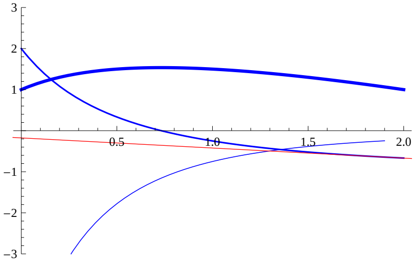
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

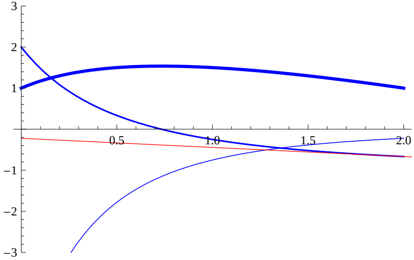
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

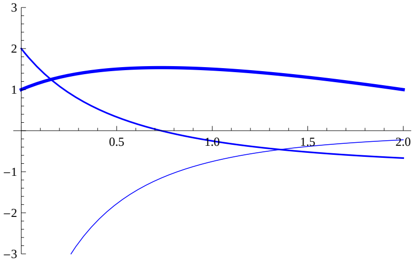
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

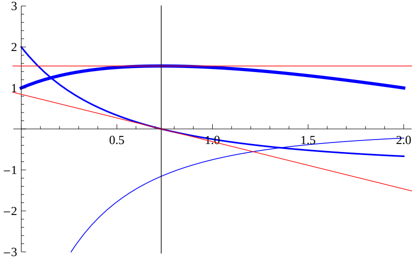
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

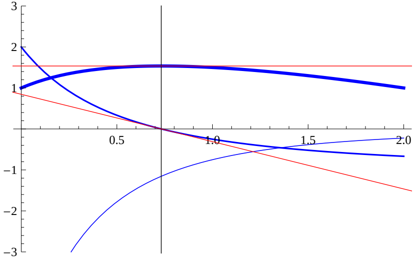
Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

Der eindimensionale Fall

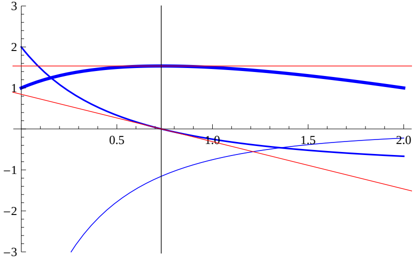


Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung = Steigung der Steigung.

$f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$

Der eindimensionale Fall

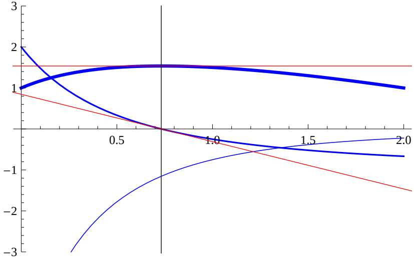


Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

$f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$
$\Longrightarrow f'(x) > 0$ für x unmittelbar links von ξ
und $f'(x) < 0$ für x unmittelbar rechts von ξ

Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

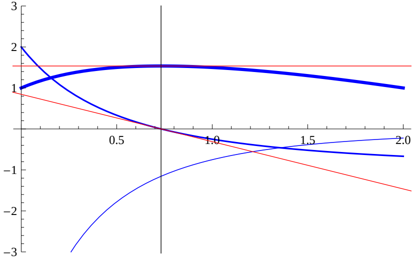
Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

$f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$

$\Longrightarrow f'(x) > 0$ für x unmittelbar links von ξ
und $f'(x) < 0$ für x unmittelbar rechts von ξ

$\Longrightarrow f$ ist steigend unmittelbar links von ξ
und f ist fallend unmittelbar rechts von ξ

Der eindimensionale Fall



Erste Ableitung = Steigung.

Zweite Ableitung =
Steigung der Steigung.

$f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) < 0$

$\Longrightarrow f'(x) > 0$ für x unmittelbar links von ξ
und $f'(x) < 0$ für x unmittelbar rechts von ξ

$\Longrightarrow f$ ist steigend unmittelbar links von ξ
und f ist fallend unmittelbar rechts von ξ

$\Longrightarrow f$ hat in ξ ein Maximum.

Der mehrdimensionale Fall

Bedingung für ein Minimum: $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$ gilt für **jede** Richtung v.

Der mehrdimensionale Fall

Bedingung für ein Minimum: $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$ gilt für **jede** Richtung v. [movies]

Der mehrdimensionale Fall

Bedingung für ein Minimum: $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$ gilt für **jede** Richtung v. [movies]

- "$f'(\xi) = 0$ für jede Richtung" heißt $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Der mehrdimensionale Fall

Bedingung für ein Minimum: $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$ gilt für **jede** Richtung v. [movies]

- "$f'(\xi) = 0$ für jede Richtung" heißt $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

  Daß das so ist, folgt wegen $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = \nabla f(\xi) \cdot v$ aus der Annahme $\nabla f(\xi) = (0, \ldots, 0)$.

Der mehrdimensionale Fall

Bedingung für ein Minimum: $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$ gilt für **jede** Richtung v. [movies]

- "$f'(\xi) = 0$ für jede Richtung" heißt $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

  Daß das so ist, folgt wegen $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = \nabla f(\xi) \cdot v$ aus der Annahme $\nabla f(\xi) = (0, \ldots, 0)$.
- "$f''(\xi) > 0$ für jede Richtung" heißt $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial v} f\right)(\xi) > 0$ für alle v.

Der mehrdimensionale Fall

Bedingung für ein Minimum: $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$ gilt für **jede** Richtung v. [movies]

- "$f'(\xi) = 0$ für jede Richtung" heißt $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

  Daß das so ist, folgt wegen $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = \nabla f(\xi) \cdot v$ aus der Annahme $\nabla f(\xi) = (0, \ldots, 0)$.

- "$f''(\xi) > 0$ für jede Richtung" heißt $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial v} f\right)(\xi) > 0$ für alle v.

  Durch zweimalige Anwendung von $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = \nabla f(\xi) \cdot v$ bekommt man $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial v} f\right)(\xi) = (H \cdot v) \cdot v$.

Der mehrdimensionale Fall

Bedingung für ein Minimum: $f'(\xi) = 0$ und $f''(\xi) > 0$ gilt für **jede** Richtung v. [movies]

- "$f'(\xi) = 0$ für jede Richtung" heißt $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

  Daß das so ist, folgt wegen $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = \nabla f(\xi) \cdot v$ aus der Annahme $\nabla f(\xi) = (0, \ldots, 0)$.

- "$f''(\xi) > 0$ für jede Richtung" heißt $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial v} f\right)(\xi) > 0$ für alle v.

  Durch zweimalige Anwendung von $\frac{\partial}{\partial v} f(\xi) = \nabla f(\xi) \cdot v$ bekommt man $\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial}{\partial v} f\right)(\xi) = (H \cdot v) \cdot v$.

Problem: Es sind immer noch unendlich viele v zu untersuchen.

Hilfssatz aus der Theorie der Matrizen

Für Diagonalmatrizen ist das Problem einfach.

Hilfssatz aus der Theorie der Matrizen

Für Diagonalmatrizen ist das Problem einfach. Wegen

$$\left(\begin{pmatrix} h_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = h_{1,1}\, v_1^2 + h_{2,2}\, v_2^2 + \cdots \\ \cdots + h_{n,n}\, v_n^2$$

gilt dann nämlich $(H \cdot v) \cdot v > 0$ für alle v genau dann wenn auf der Diagonalen von H nur positive Zahlen stehen.

Hilfssatz aus der Theorie der Matrizen

Für Diagonalmatrizen ist das Problem einfach. Wegen

$$\left(\begin{pmatrix} h_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{aligned} h_{1,1}\, v_1^2 + h_{2,2}\, v_2^2 + \cdots \\ \cdots + h_{n,n}\, v_n^2 \end{aligned}$$

gilt dann nämlich $(H \cdot v) \cdot v > 0$ für alle v genau dann wenn auf der Diagonalen von H nur positive Zahlen stehen.

Idee: Wenn H keine Diagonalmatrix ist, wähle ein Koordinatensystem, für das H eine Diagonalmatrix ist.

Hilfssatz aus der Theorie der Matrizen

Für Diagonalmatrizen ist das Problem einfach. Wegen

$$\left(\begin{pmatrix} h_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = h_{1,1}\, v_1^2 + h_{2,2}\, v_2^2 + \cdots \\ \cdots + h_{n,n}\, v_n^2$$

gilt dann nämlich $(H \cdot v) \cdot v > 0$ für alle v genau dann wenn auf der Diagonalen von H nur positive Zahlen stehen.

Idee: Wenn H keine Diagonalmatrix ist, wähle ein Koordinatensystem, für das H eine Diagonalmatrix ist. [demo]

Hilfssatz aus der Theorie der Matrizen

Für Diagonalmatrizen ist das Problem einfach. Wegen

$$\left(\begin{pmatrix} h_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & h_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = h_{1,1}\, v_1^2 + h_{2,2}\, v_2^2 + \cdots \\ \cdots + h_{n,n}\, v_n^2$$

gilt dann nämlich $(H \cdot v) \cdot v > 0$ für alle v genau dann wenn auf der Diagonalen von H nur positive Zahlen stehen.

Idee: Wenn H keine Diagonalmatrix ist, wähle ein Koordinatensystem, für das H eine Diagonalmatrix ist. [demo]

Dazu nimmt man die Eigenvektoren von H als Koordinatenachsen her. Statt H hat man in diesem System eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von H auf der Diagonale.