

C. Nullstellenberechnung

Nullstellenberechnung

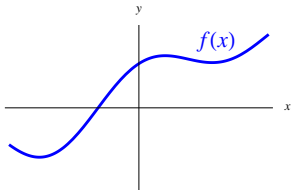
Problem: Gegeben $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ db,

gesucht $\xi \in D$ mit $f(\xi) = 0$.

So ein ξ heißt dann *Nullstelle* von f .

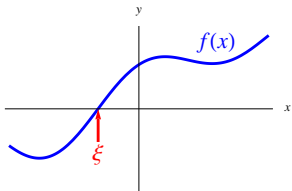
Nullstellenberechnung

Problem: Gegeben $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ db,
gesucht $\xi \in D$ mit $f(\xi) = 0$.
So ein ξ heißt dann *Nullstelle* von f .



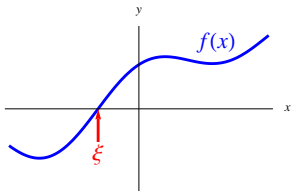
Nullstellenberechnung

Problem: Gegeben $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ db,
gesucht $\xi \in D$ mit $f(\xi) = 0$.
So ein ξ heißt dann *Nullstelle* von f .



Nullstellenberechnung

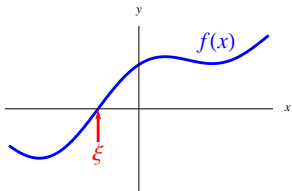
Problem: Gegeben $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ db,
gesucht $\xi \in D$ mit $f(\xi) = 0$.
So ein ξ heißt dann *Nullstelle* von f .



„Gegeben“ soll hier heißen, daß man
Näherungswerte von $f(x)$ und ggf. $f'(x)$ zu gegebenem $x \in D$
ausrechnen kann.

Nullstellenberechnung

Problem: Gegeben $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ db,
gesucht $\xi \in D$ mit $f(\xi) = 0$.
So ein ξ heißt dann *Nullstelle* von f .



„Gegeben“ soll hier heißen, daß man
Näherungswerte von $f(x)$ und ggf. $f'(x)$ zu gegebenem $x \in D$
ausrechnen kann.

Als Ergebnis wollen wir einen Näherungswert für ξ bekommen.

Nullstellenberechnung

Newtoniteration:

Nullstellenberechnung

Newtoniteration:

1. Rate eine Nullstelle ξ .

Nullstellenberechnung

Newtoniteration:

1. Rate eine Nullstelle ξ .
2. Wenn $f(\xi) \approx 0$, brich ab mit ξ als Ergebnis.

Nullstellenberechnung

Newtoniteration:

1. Rate eine Nullstelle ξ .
2. Wenn $f(\xi) \approx 0$, brich ab mit ξ als Ergebnis.
3. Setze $\xi := \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$.

Nullstellenberechnung

Newtoniteration:

1. Rate eine Nullstelle ξ .
2. Wenn $f(\xi) \approx 0$, brich ab mit ξ als Ergebnis.
3. Setze $\xi := \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$.
4. Goto 2.

Nullstellenberechnung

Newtoniteration:

1. Rate eine Nullstelle ξ .
2. Wenn $f(\xi) \approx 0$, brich ab mit ξ als Ergebnis.
3. Setze $\xi := \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$.
4. Goto 2.

Hierdurch werden die Terme einer Folge (x_n) in D berechnet:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \dots$$

Nullstellenberechnung

Newtoniteration:

1. Rate eine Nullstelle ξ .
2. Wenn $f(\xi) \approx 0$, brich ab mit ξ als Ergebnis.
3. Setze $\xi := \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$.
4. Goto 2.

Hierdurch werden die Terme einer Folge (x_n) in D berechnet:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \quad x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \dots$$

Im Idealfall konvergiert diese Folge gegen eine Nullstelle von f .

Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung von $\pi/2$ durch Näherung an die Nullstelle von \cos .

Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung von $\pi/2$ durch Näherung an die Nullstelle von \cos .

Die Iterationsvorschrift lautet hier:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n)}{\cos'(x_n)} = x_n + \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)}.$$

Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung von $\pi/2$ durch Näherung an die Nullstelle von \cos .

Die Iterationsvorschrift lautet hier:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n)}{\cos'(x_n)} = x_n + \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)}.$$

Wir nehmen (willkürlich) $x_0 = 1$ als Startwert und bekommen

Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung von $\pi/2$ durch Näherung an die Nullstelle von \cos .

Die Iterationsvorschrift lautet hier:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n)}{\cos'(x_n)} = x_n + \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)}.$$

Wir nehmen (willkürlich) $x_0 = 1$ als Startwert und bekommen

$$x_0 = 1.00$$

$$x_1 = 1.642092615934330703006419986594265620230278113918171379101162$$

$$x_2 = 1.570675277161250707815909767966451128778751756204488141937323$$

$$x_3 = 1.570796326795487866552454349127506838731565880669983935271580$$

Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung von $\pi/2$ durch Näherung an die Nullstelle von \cos .

Die Iterationsvorschrift lautet hier:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n)}{\cos'(x_n)} = x_n + \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)}.$$

Wir nehmen (willkürlich) $x_0 = 1$ als Startwert und bekommen

$x_0 = 1.00$

$x_1 = 1.642092615934330703006419986594265620230278113918171379101162$

$x_2 = 1.570675277161250707815909767966451128778751756204488141937323$

$x_3 = 1.570796326795487866552454349127506838731565880669983935271580$

$x_4 = 1.570796326794896619231321691639751442029689921959838567249189$

$x_5 = 1.570796326794896619231321691639751442098584699687552910487472$

Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung von $\pi/2$ durch Näherung an die Nullstelle von \cos .

Die Iterationsvorschrift lautet hier:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\cos(x_n)}{\cos'(x_n)} = x_n + \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)}.$$

Wir nehmen (willkürlich) $x_0 = 1$ als Startwert und bekommen

$x_0 = 1.00$

$x_1 = 1.642092615934330703006419986594265620230278113918171379101162$

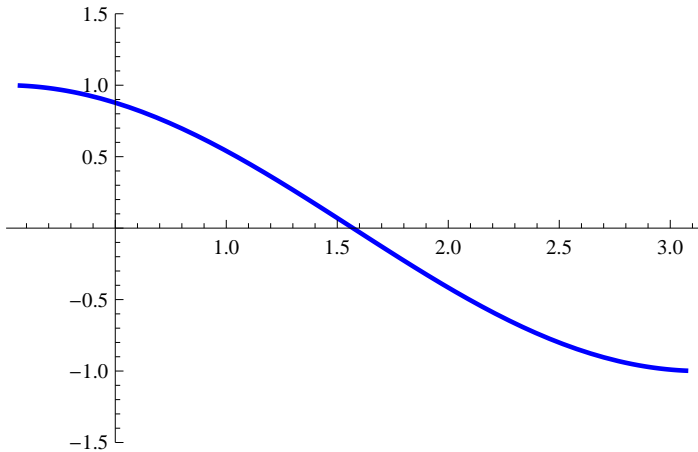
$x_2 = 1.570675277161250707815909767966451128778751756204488141937323$

$x_3 = 1.570796326795487866552454349127506838731565880669983935271580$

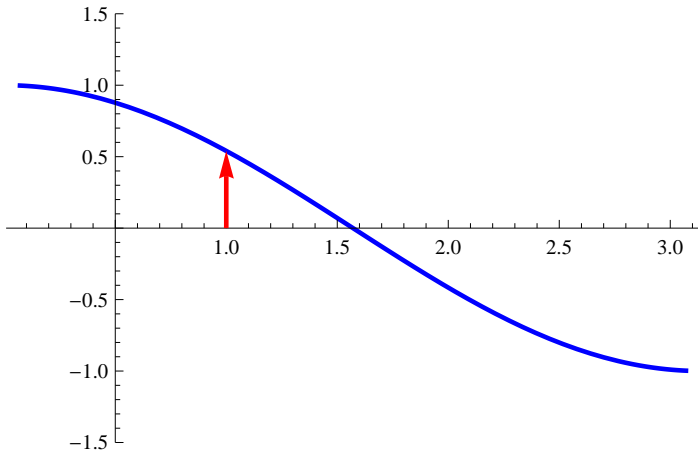
$x_4 = 1.570796326794896619231321691639751442029689921959838567249189$

$x_5 = 1.570796326794896619231321691639751442098584699687552910487472$

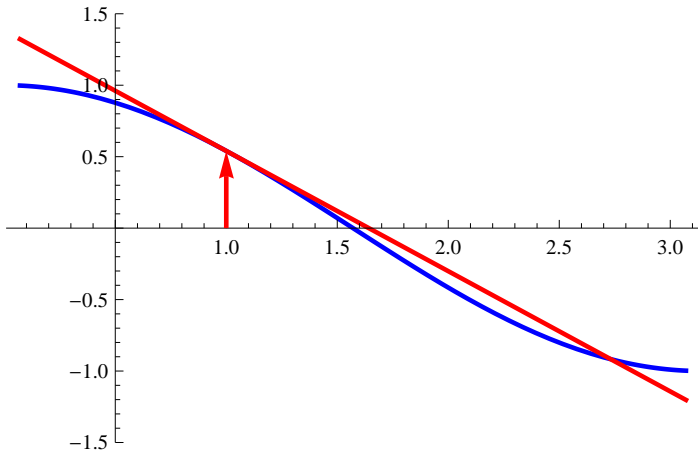
Nullstellenberechnung



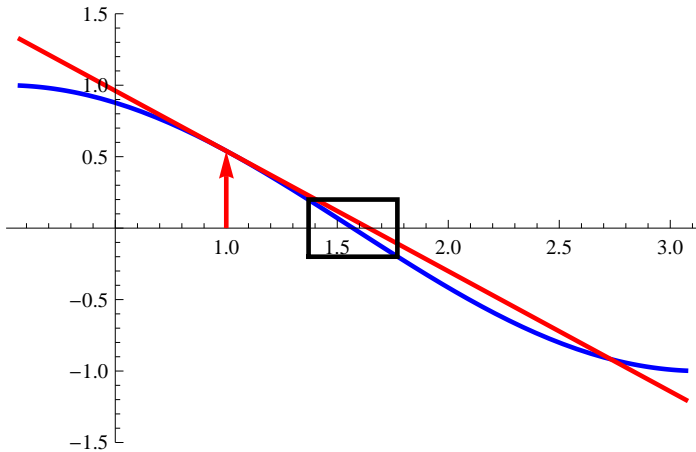
Nullstellenberechnung



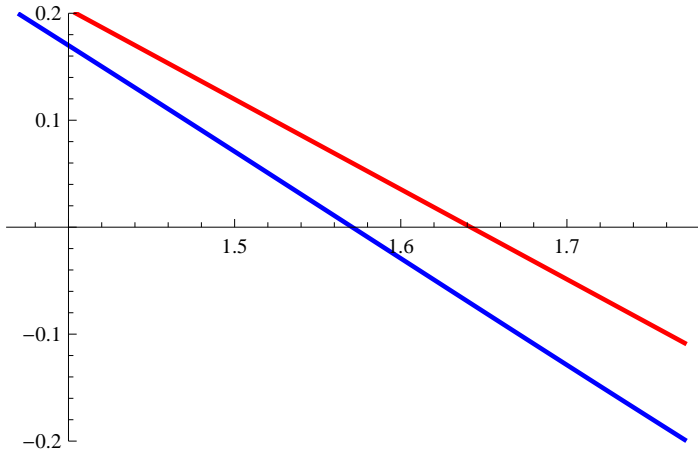
Nullstellenberechnung



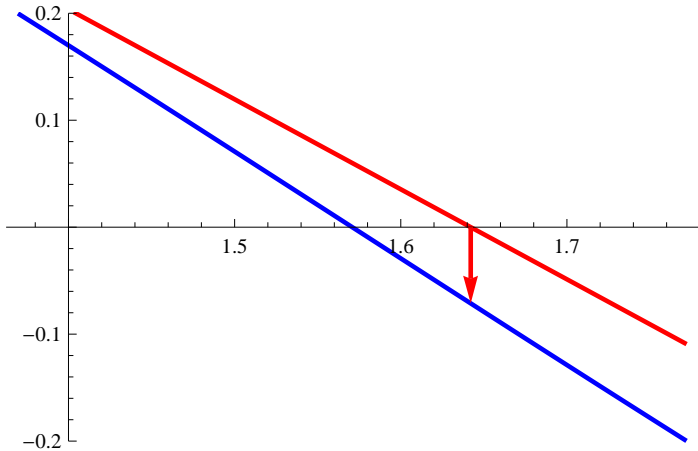
Nullstellenberechnung



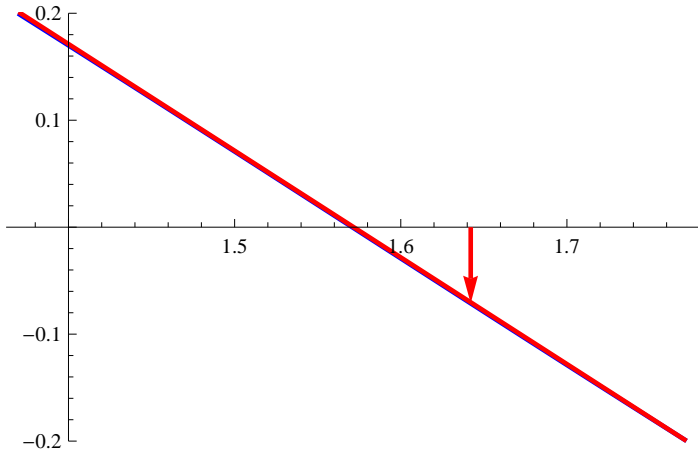
Nullstellenberechnung



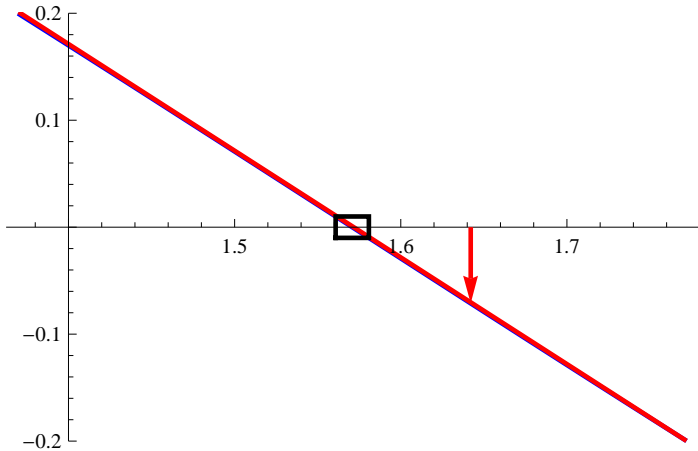
Nullstellenberechnung



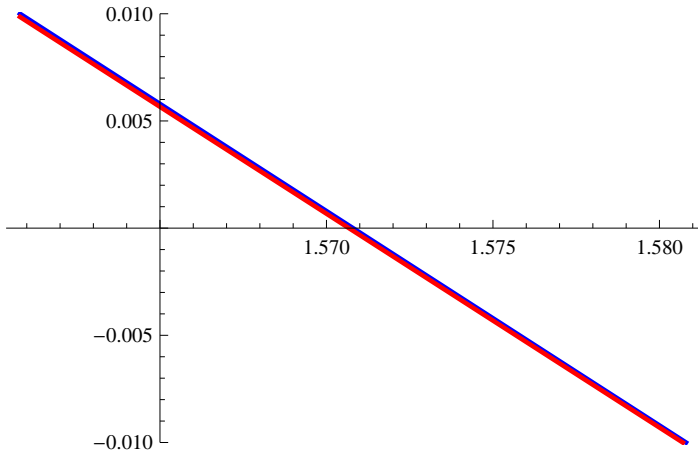
Nullstellenberechnung



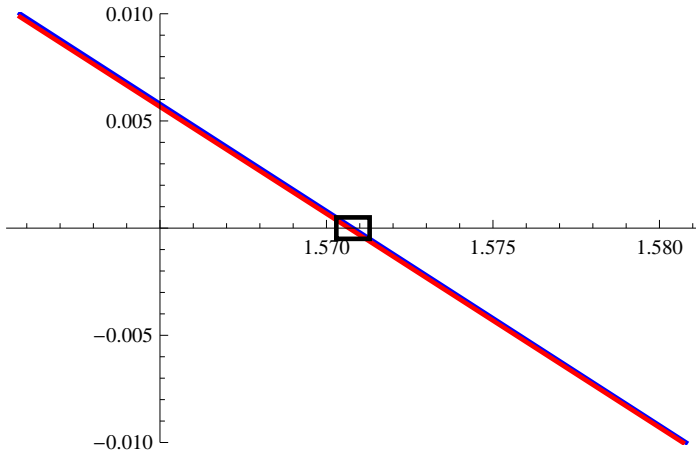
Nullstellenberechnung



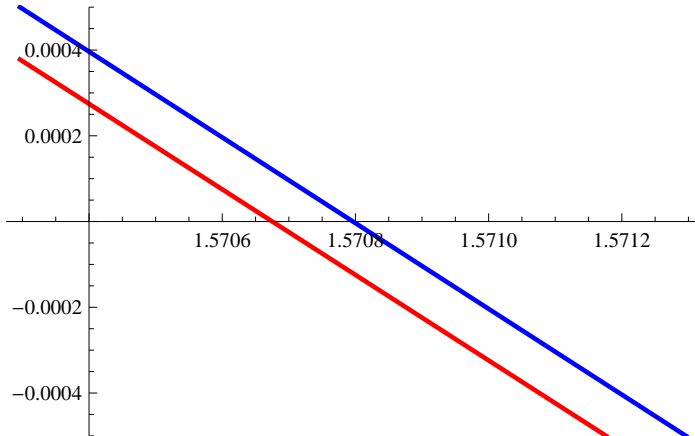
Nullstellenberechnung



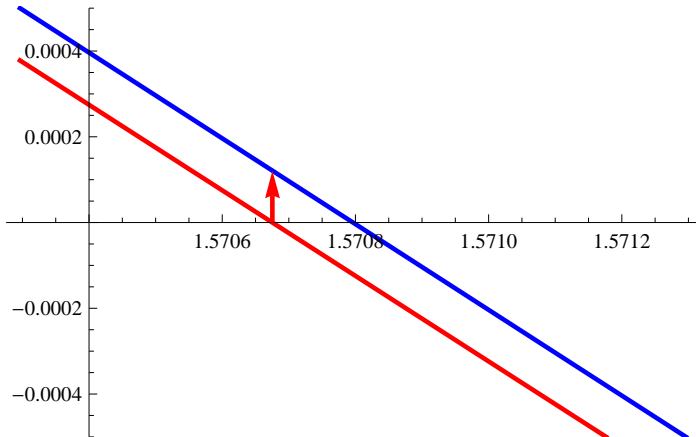
Nullstellenberechnung



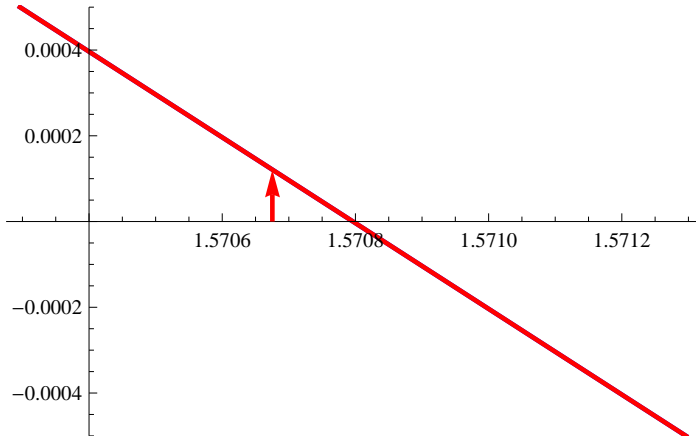
Nullstellenberechnung



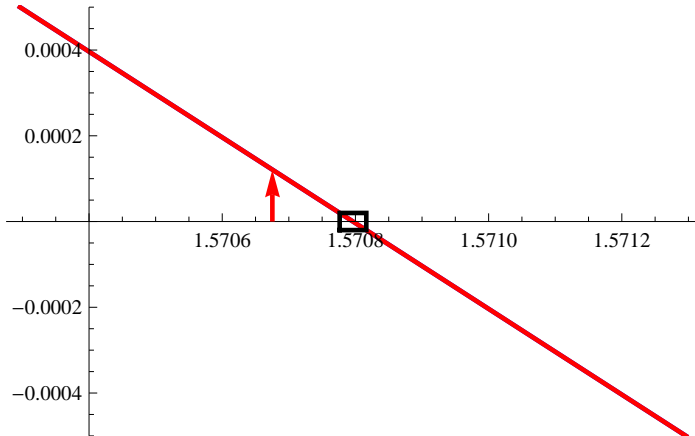
Nullstellenberechnung



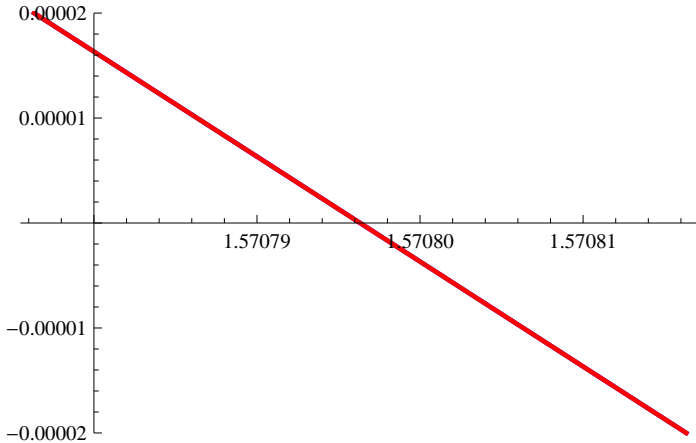
Nullstellenberechnung



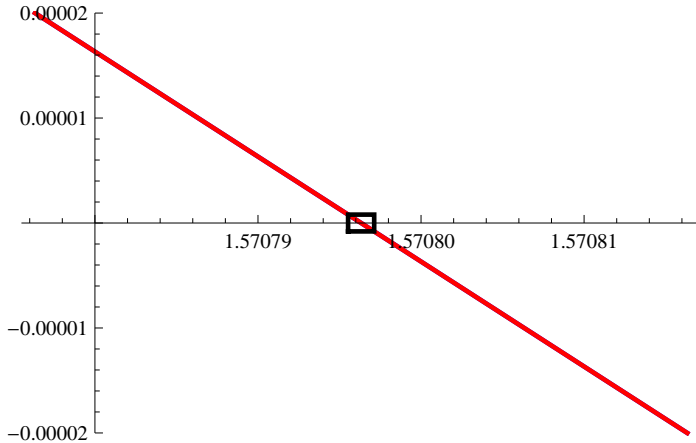
Nullstellenberechnung



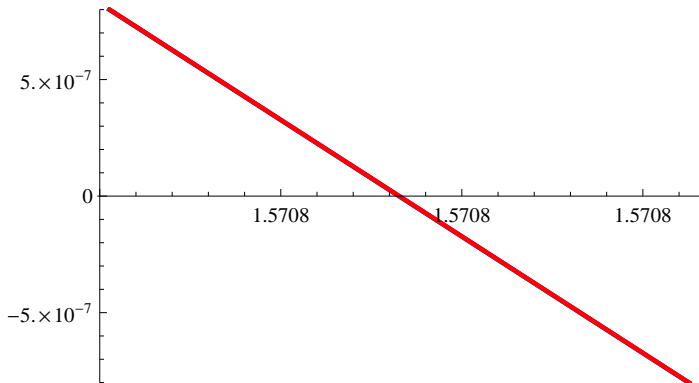
Nullstellenberechnung



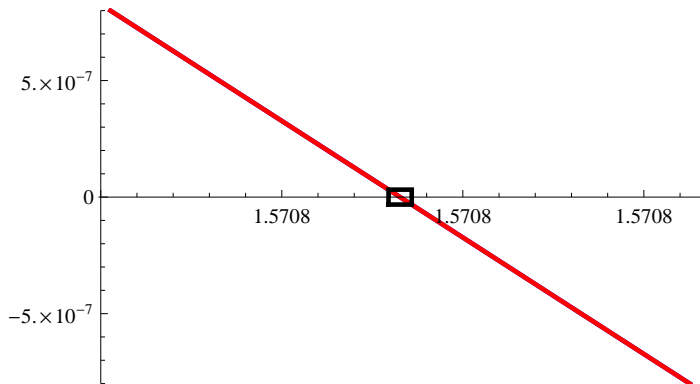
Nullstellenberechnung



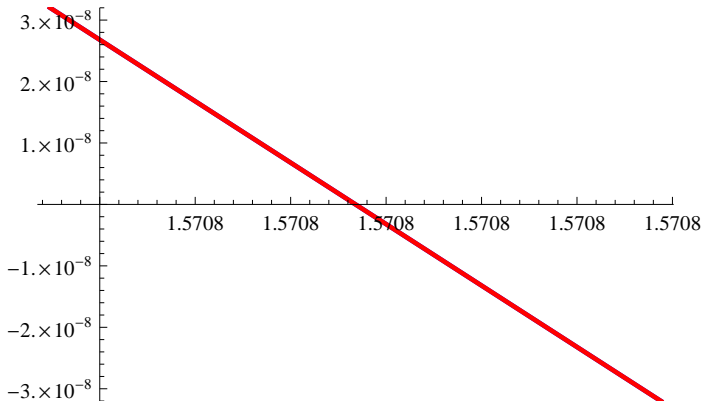
Nullstellenberechnung



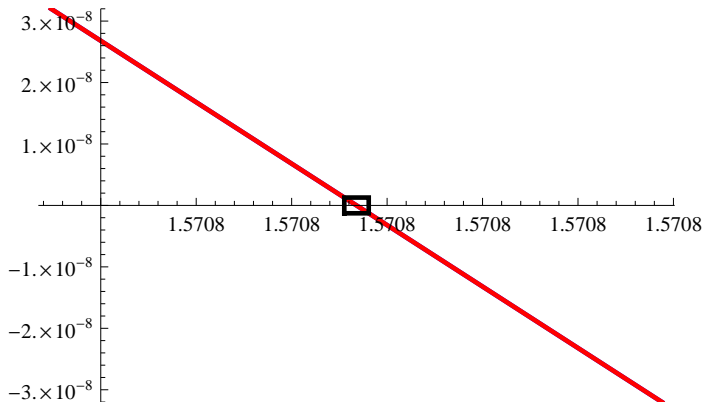
Nullstellenberechnung



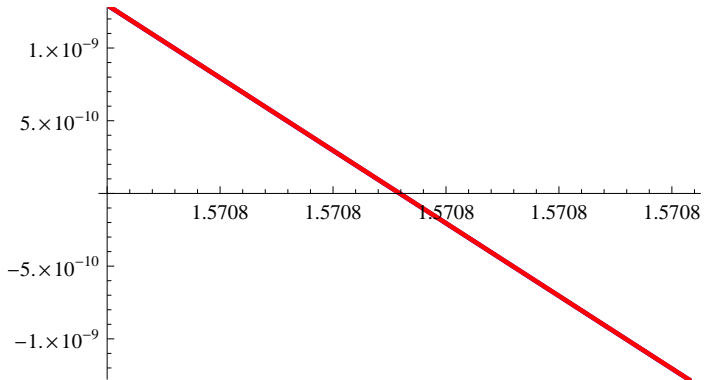
Nullstellenberechnung



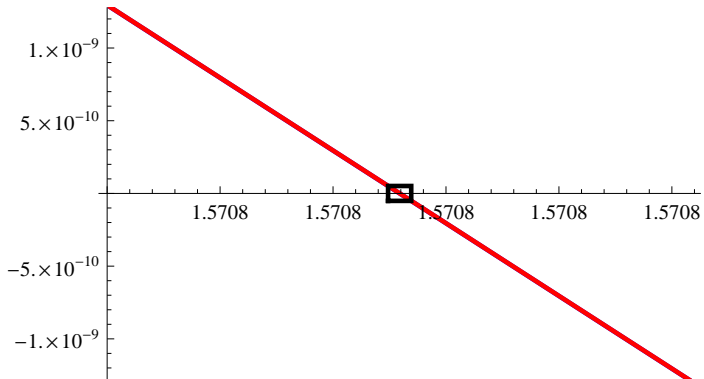
Nullstellenberechnung



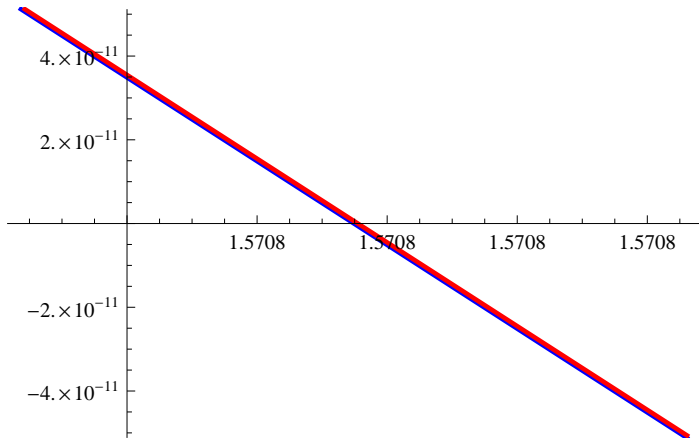
Nullstellenberechnung



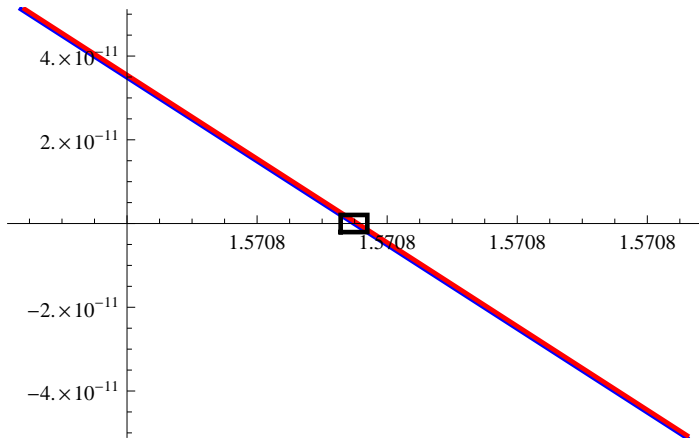
Nullstellenberechnung



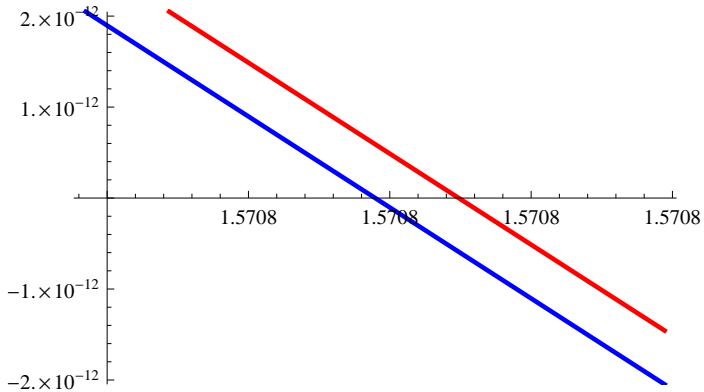
Nullstellenberechnung



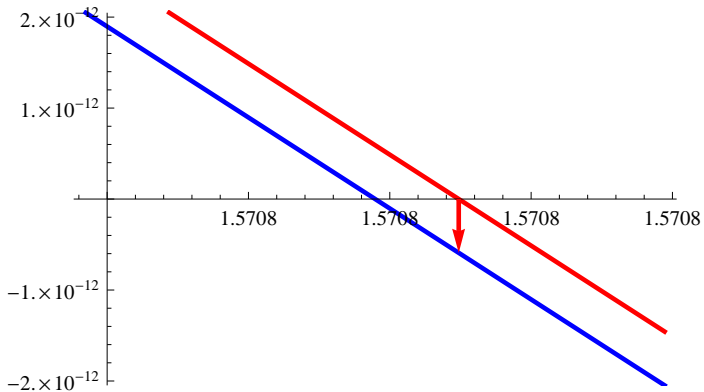
Nullstellenberechnung



Nullstellenberechnung



Nullstellenberechnung



Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung der Nullstelle von

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 2x + 2$$

Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung der Nullstelle von

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 2x + 2$$

Die Iterationsvorschrift lautet hier:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 2 \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^3 - 2}$$

Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung der Nullstelle von

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 2x + 2$$

Die Iterationsvorschrift lautet hier:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 2 \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^3 - 2}$$

Wir wählen wieder $x_0 = 1$ als Startwert.

Nullstellenberechnung

Beispiel: Berechnung der Nullstelle von

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 2x + 2$$

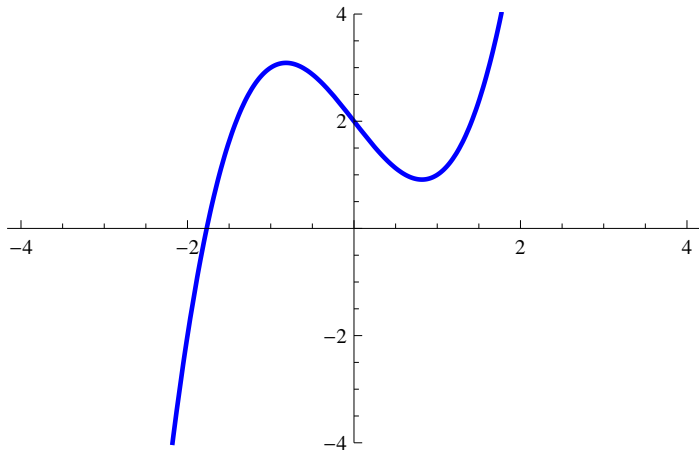
Die Iterationsvorschrift lautet hier:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = 2 \frac{x_n^3 - 1}{3x_n^3 - 2}$$

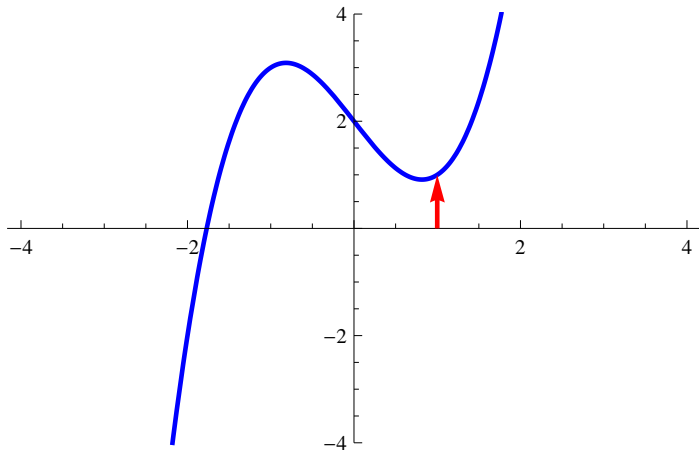
Wir wählen wieder $x_0 = 1$ als Startwert.

Dann passiert folgendes:

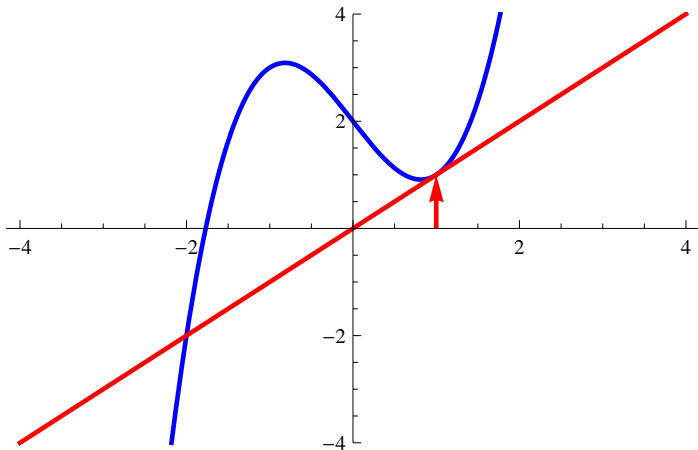
Nullstellenberechnung



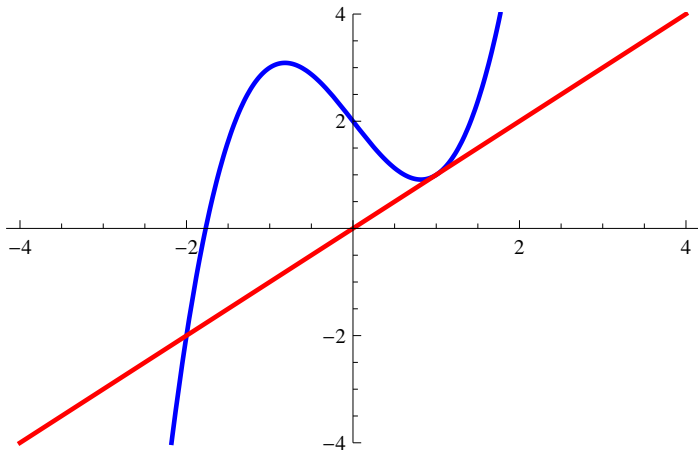
Nullstellenberechnung



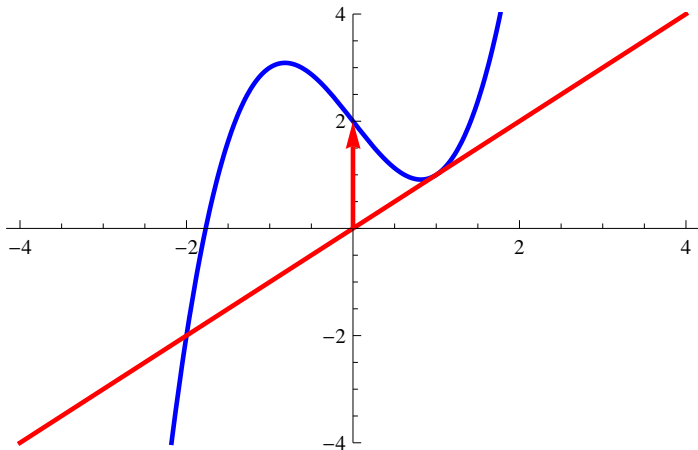
Nullstellenberechnung



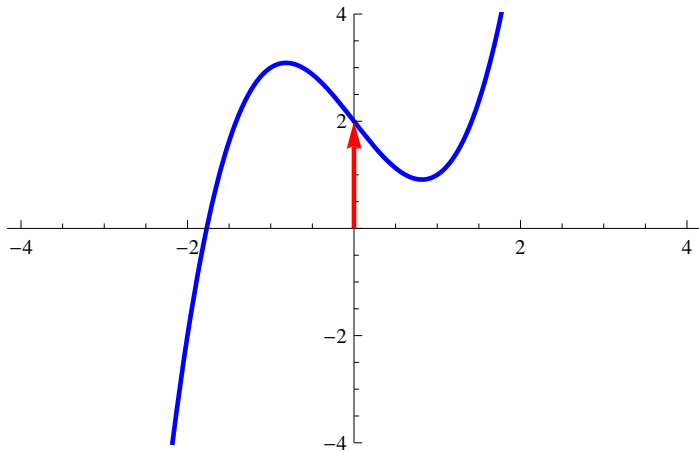
Nullstellenberechnung



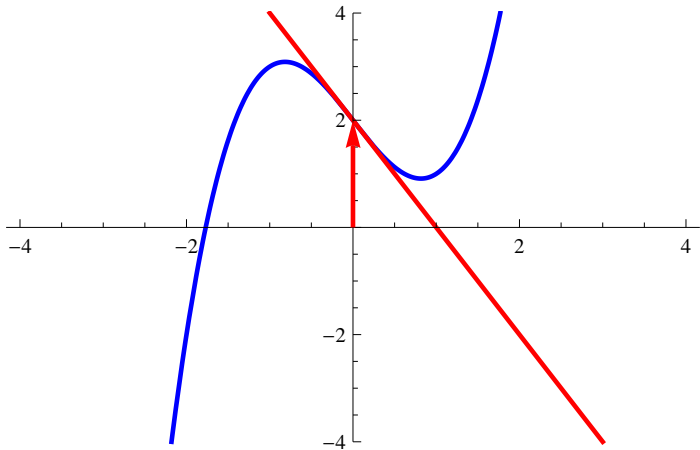
Nullstellenberechnung



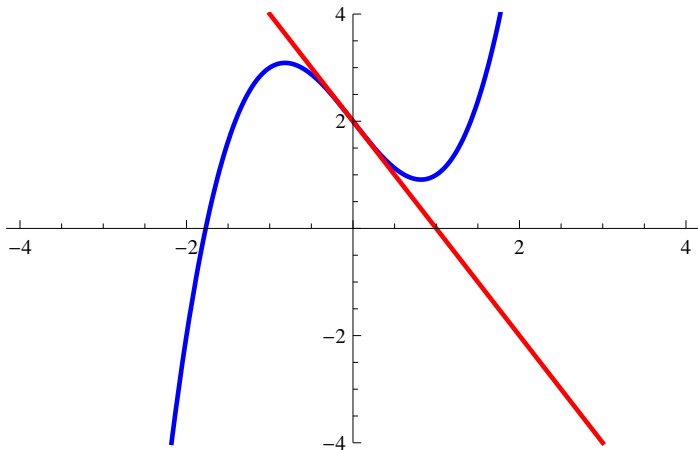
Nullstellenberechnung



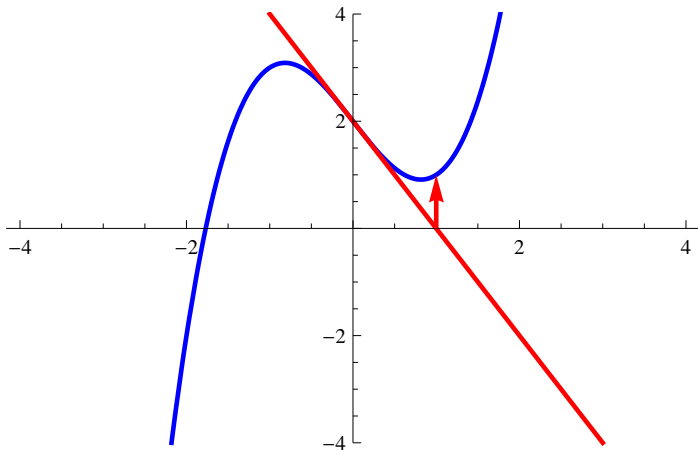
Nullstellenberechnung



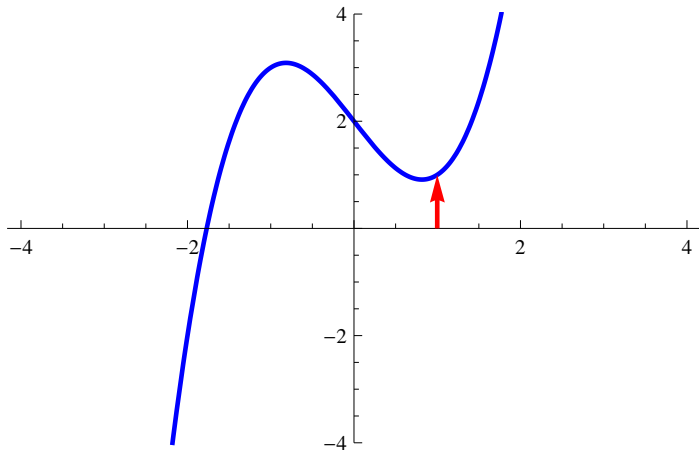
Nullstellenberechnung



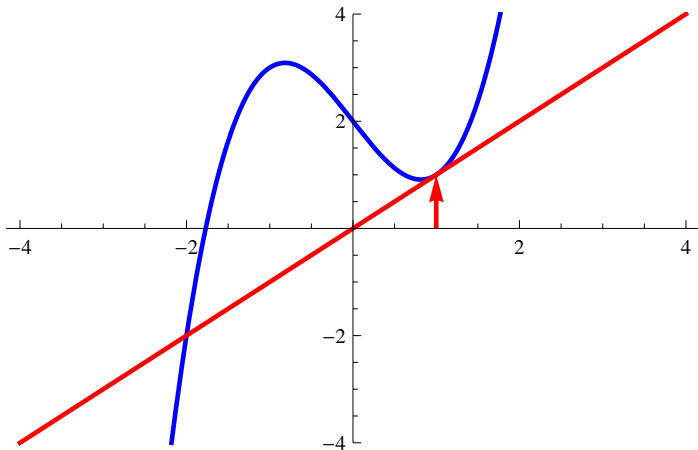
Nullstellenberechnung



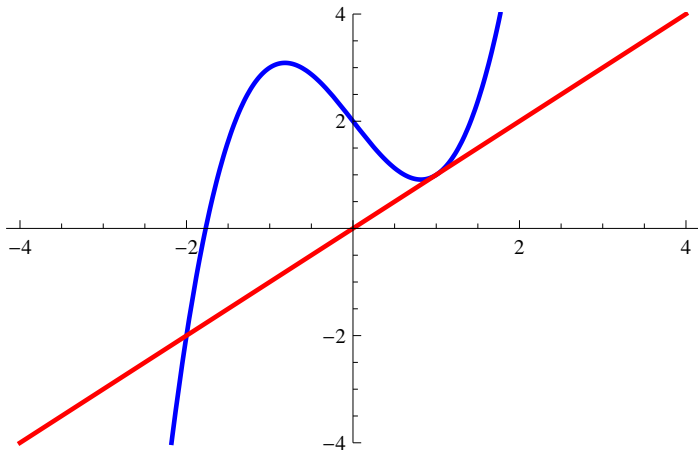
Nullstellenberechnung



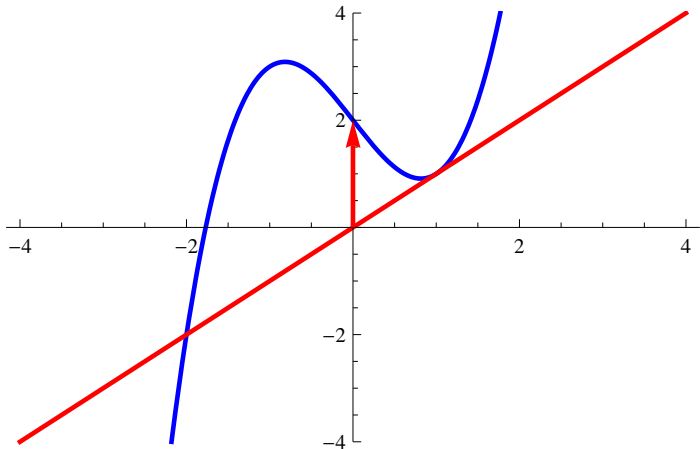
Nullstellenberechnung



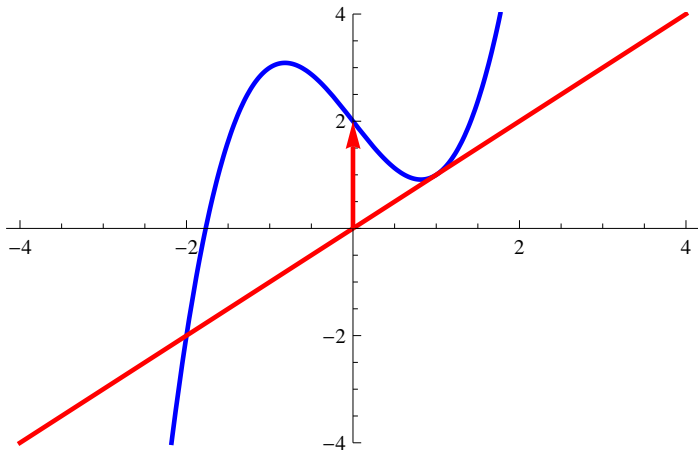
Nullstellenberechnung



Nullstellenberechnung



Nullstellenberechnung



Das konvergiert nicht 😞

Nullstellenberechnung

Anmerkungen:

Nullstellenberechnung

Anmerkungen:

- ▶ Das Verfahren konvergiert nicht immer.

Nullstellenberechnung

Anmerkungen:

- ▶ Das Verfahren konvergiert nicht immer.
- ▶ Wenn es konvergiert, dann verdammt schnell.

Nullstellenberechnung

Anmerkungen:

- ▶ Das Verfahren konvergiert nicht immer.
- ▶ Wenn es konvergiert, dann verdammt schnell.
- ▶ Aus Näherungswerten für f bekommt man Näherungswerte für f' mit

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

für ein klein genug gewähltes positives ε .

Nullstellenberechnung

Anmerkungen:

- ▶ Das Verfahren konvergiert nicht immer.
- ▶ Wenn es konvergiert, dann verdammt schnell.
- ▶ Aus Näherungswerten für f bekommt man Näherungswerte für f' mit

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}$$

für ein klein genug gewähltes positives ε .

Numerisch etwas besser ist die Näherungsformel

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (\varepsilon \text{ positiv und klein})$$

