Analysis 326.022 · Winter 2012/2013 · **Zweite Vorlesungsklausur** 03.04.2013

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)^2$. Notieren Sie für folgende Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind.

a) Wenn f stetig ist, dann auch g.

b) Wenn g stetig ist, dann auch f.

c) Wenn f differenzierbar ist, dann auch g.

d) Wenn g differenzierbar ist, dann auch f.

Lösung. wahr, falsch, wahr, falsch.

Aufgabe 2 Sei $(a_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge mit $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn die Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n=0}^\infty$ konvergiert, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n \frac{x^n}{n!}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Lösung. Sei $a = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Nach Annahme existiert dieser Grenzwert. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Es gilt

$$\Big|\frac{a_{n+1}x^{n+1}/(n+1)!}{a_n x^n/n!}\Big| = \Big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\Big|\frac{x}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} |a|0 = 0 < 1.$$

Daraus folgt mit dem Quotientenkriterium die Behauptung.

Aufgabe 3 Für jedes feste $t > 0$ sei die Funktion

$$f_t\colon [\tfrac{2}{3}, 7] \to \mathbb{R}, \qquad f_t(x) = \frac{\exp(tx)}{\sqrt{x - 2t + 3xt}}$$

gegeben. Bestimmen Sie alle t, so dass f_t im Punkt $x = 1$ eine Minimalstelle hat.

Lösung. Zunächst gilt für beliebige positive t

$$\begin{aligned} f_t'(x) &= \frac{\exp(tx)t\sqrt{x-2t+3xt} - \exp(tx)\frac{1+3t}{2\sqrt{x-2t+3xt}}}{x - 2t + 3xt} \\ &= \frac{2t(x-2t+3xt) - (1+3t)}{2(x-2t+3xt)^{3/2}}\exp(tx) \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $\exp(t) \neq 0$ und $t > 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned} & f_t'(1) = \frac{2t(1-2t+3t) - (1+3t)}{2(1-2t+3t)^{3/2}}\exp(t) = 0 \\ \iff\quad & 2t(1+t) - (1+3t) = 0 \\ \iff\quad & t = 1 \end{aligned}$$

Da eine Extremstelle in $x = 1$ nur dann vorliegen kann, wenn $f_t'(1) = 0$ ist, folgt, dass dies allenfalls für den Wert $t = 1$ der Fall sein kann.
Dass für $t = 1$ tatsächlich ein Extremum vorliegt, folgt aus

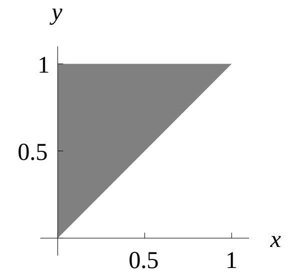
$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{8x-8}{2(4x-2)^{3/2}}\exp(x) \\ &= \sqrt{2}\frac{x-1}{(2x-1)^{3/2}}\exp(x) \\ \Rightarrow\quad f_1''(x) &= \sqrt{2}\Big(\frac{(2x-1)^{3/2} - (x-1)\frac{3}{2}(2x-1)^{1/2}2}{(2x-1)^3}\exp(x) + \frac{x-1}{(2x-1)^{3/2}}\exp(x)\Big) \\ &= \sqrt{2}\frac{(2x-1) - 3(x-1) + (x-1)(2x-1)}{(2x-1)^{5/2}}\exp(x) \\ \Rightarrow\quad f_1''(1) &= \sqrt{2}\,\mathrm{e} > 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$.

a) Skizzieren Sie D.

b) Berechnen Sie $\int_D xy^2\, d(x,y)$.

Lösung. a)



b) $\displaystyle\int_D xy^2\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^y xy^2\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_0^y dy = \frac{1}{2}\int_0^1 y^4\, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{1}{2}\frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$

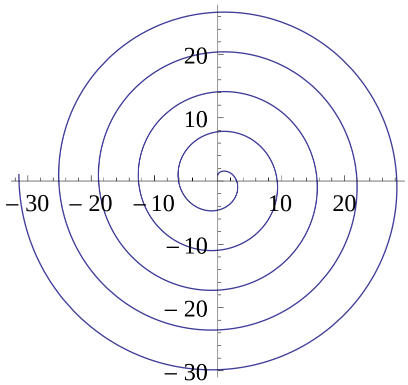
oder: $\displaystyle\int_D xy^2\, d(x,y) = \int_0^1 \int_x^1 xy^2\, dy\, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}xy^3\right]_x^1 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x-x^4)dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^1$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\Big) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{10} - \frac{2}{10}\right) = \frac{1}{10}.$

Aufgabe 5 Die Kurve

$$\gamma\colon [0,10\pi] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(t) = \big(\sin(t) - t\cos(t), \cos(t) + t\sin(t)\big)$$

beschreibt die rechts abgebildete Spirale.



a) Berechnen Sie die Länge $L(\gamma)$ von γ.

b) Man sagt, eine Kurve $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist „nach der Weglänge parametrisiert", falls für jedes $t \in [a,b]$ gilt $L(\sigma|_{[a,t]}) = t$, wobei $\sigma|_{[a,t]}$ die Kurve bezeichnet, die man aus σ erhält, indem man den Definitionsbereich auf $[a,t] \subseteq [a,b]$ einschränkt.

Eine differenzierbare Kurve $\sigma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann nach der Weglänge parametrisiert, wenn gilt $a = 0$ und $||\sigma'(t)|| = 1$ für alle $t \in [a,b]$.

Geben Sie eine Kurve $\tilde{\gamma}\colon [0,L] \to \mathbb{R}^2$ an, die nach der Weglänge parametrisiert ist und das gleiche Bild hat wie die obige Kurve γ.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $h(t) := L(\gamma|_{[0,t]})$ für allgemeines t und überprüfen Sie dann, dass $\tilde{\gamma}$ mit $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(h^{-1}(t))$ die geforderte Eigenschaft hat.

Lösung. a) Nach dem entsprechenden Satz der Vorlesung gilt $L(\gamma) = \int_0^{10\pi} ||\gamma'(t)||dt$. Mit

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \big(\cos(t) - \cos(t) + t\sin(t), -\sin(t) + \sin(t) + t\cos(t)\big) \\ &= \big(t\sin(t), t\cos(t)\big) \\ \Rightarrow \quad ||\gamma'(t)|| &= \sqrt{\big(t\sin(t)\big)^2 + \big(t\cos(t)\big)^2} = \sqrt{t^2} = t \end{aligned}$$

folgt also

$$L(\gamma) = \int_0^{10\pi} t\, dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{10\pi} = 50\pi^2.$$

b) Wie oben ergibt sich für allgemeines t

$$L(\gamma|_{[0,t]}) = \int_0^t ||\gamma'(\tau)||d\tau = \left[\frac{1}{2}\tau^2\right]_0^t = \frac{1}{2}t^2.$$

Setzt man $h(t) = \frac{1}{2}t^2$, so ist $h^{-1}(t) = \sqrt{2t}$. Wir definieren also, dem Hinweis folgend,

$$\tilde{\gamma}\colon [0, 50\pi^2] \to \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t) := \gamma(\sqrt{2t}) = \big(\sin(\sqrt{2t}) - \sqrt{2t}\cos(\sqrt{2t}), \cos(\sqrt{2t}) + \sqrt{2t}\sin(\sqrt{2t})\big).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{\gamma}'(t) &= \big(\cos(\sqrt{2t})\frac{2}{2\sqrt{2t}} - \frac{2}{2\sqrt{2t}}\cos(\sqrt{2t}) + \sqrt{2t}\sin(\sqrt{2t})\frac{2}{2\sqrt{2t}}, \\
&\quad -\sin(\sqrt{2t})\frac{2}{2\sqrt{2t}} + \frac{2}{2\sqrt{2t}}\sin(\sqrt{2t}) + \sqrt{2t}\cos(\sqrt{2t})\frac{2}{2\sqrt{2t}}\big) \\
&= \big(\sin(\sqrt{2t}), \cos(\sqrt{2t})\big) \\
\Rightarrow \quad ||\tilde{\gamma}'(t)|| &= \sqrt{\sin(\sqrt{2t})^2 + \cos(\sqrt{2t})^2} = 1,
\end{aligned}$$

wie gefordert.