Analysis 326.022 · Winter 2012/2013 · **Vorlesungsklausur** 04.02.2013

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 Ordnen Sie die Begriffe der ersten Zeile den passenden Themen der zweiten Zeile zu.

Hauptsatz, Mittelwertsatz, Monotoniekriterium, Minorantenkriterium, Zwischenwertsatz.

Folgen, Reihen, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integration.

Lösung. Hauptsatz–Integration, Mittelwertsatz–Differenzierbarkeit, Monotoniekriterium–Folgen, Minorantenkriterium–Reihen, Zwischenwertsatz–Stetigkeit.

Aufgabe 2 Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge von positiven Zahlen, d.h. $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für jedes $x \in [0,1]$.

Lösung. Es gilt $0 \leq a_n x^n \leq a_n$, weil $a_n > 0$ für alle n und $0 \leq x \leq 1$ nach Annahme. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach Annahme konvergiert, folgt mit dem Majorantenkriterium die Behauptung.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x^3|$ im Punkt $x = 0$ auf Differenzierbarkeit.

Lösung. Da der Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^3|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|x^2}{x} = \lim_{x\to 0} |x|x = 0$$

existiert, ist f in 0 differenzierbar.

Aufgabe 4 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 5 - 6x + 3x^2 - y + xy + 3y^2$.

a) Bestimmen Sie alle Extremstellen von f.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_{[0,1]^2} f(x,y)d(x,y)$.

Lösung. a) $\nabla f(x,y) = \big(-6 + 6x + y, -1 + x + 6y\big) = (0,0) \iff (x,y) = (1,0)$. Nach Satz der Vorlesung kann höchstens im Punkt $(1,0)$ ein Extremum vorliegen.

Die Eigenwerte von $H(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ sind die Nullstellen des Polynoms $(6-\lambda)^2 - 1$, also $\lambda = 5$ und $\lambda = 7$. Da beide positiv sind, folgt nach Satz der Vorlesung, dass in $(1,0)$ ein Minimum vorliegt.

b) $$\int_{[0,1]^2} f(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \big[5x - 3x^2 + x^3 - yx + \tfrac{1}{2}x^2y + 3xy^2\big]_0^1 dy$$
$$= \int_0^1 \big(3 - \tfrac{1}{2}y + 3y^2\big)dy = \big[3y - \tfrac{1}{4}y^2 + y^3\big]_0^1 = 3 - \tfrac{1}{4} + 1 = \tfrac{15}{4}.$$

Aufgabe 5 Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt integrierbar, falls es eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $\nabla F = f$ ist. In diesem Fall nennt man F eine Stammfunktion von f.

a) Konstruieren Sie eine Stammfunktion für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y, x - y)$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y, -x)$ nicht integrierbar ist.

Lösung. a) Damit F eine Stammfunktion ist, muss gelten $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = y$ und $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x - y$. Aus der ersten Bedingung folgt durch Integration nach x, dass F die Form $xy + u(y)$ haben muss, wobei u nicht von x abhängt. Aus der zweiten Bedingung folgt dann, dass $\frac{\partial}{\partial y}(xy + u(y)) = x + u'(y) = x - y$ sein muss, also $u'(y) = -y$. Durch Integration erhält man zum Beispiel $u(y) = -\frac{1}{2}y^2$, also $F(x,y) = xy - \frac{1}{2}y^2$.

b) Angenommen F ist eine Stammfunktion. Dann muss gelten $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = y$ und $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = -x$. Aus der ersten Bedingung folgt durch Integration nach x, dass F die Form $xy + u(y)$ haben muss, wobei u nicht von x abhängt. Aus der zweiten Bedingung folgt analog, dass F die Form $-xy + v(x)$ hat, wobei $v(x)$ nicht von y abhängt. Beide Bedingungen zusammen ergeben $xy + u(y) = F(x,y) = -xy + v(x)$, also $2xy = v(x) - u(y)$. Ableitung nach x führt auf die Bedingung $2y = v'(x)$, die unmöglich zu erfüllen ist, weil die linke Seite von y abhängt und die rechte nicht.