Übungsblatt 7

Besprechung am **13.12.2012**

Aufgabe 1 Welche dieser mehrdimensionalen Folgen konvergieren für $n \to \infty$? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert!

$$a_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{n^2-1}{(n+1)^2}, \frac{1}{n}\right), \quad b_n = \left(\sin\Bigl(\frac{\pi}{n}\Bigr), \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}}\Bigl(\frac{e}{n}\Bigr)^n, \cos(n\pi)\right), \quad c_n = \left(\frac{n!}{n^n}, \sqrt[n]{n}\right).$$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Konvergenz im Punkt $(0,0)$!

$$f_1(x,y) = \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4+1}, \qquad f_2(x,y) = \frac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^4+y^4}, \qquad f_3(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^4-x^3y+xy^3+y^4}.$$

Aufgabe 3 Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = \log\bigl(x^2+y^2+2xy+1\bigr)$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial}{\partial v} f(1,-1)$ für beliebige Richtungen $v = (v_1, v_2)$ und den Gradienten von $f(x,y)$. Welchen Wert nimmt dieser im Punkt $(1,-1)$ an?

Aufgabe 4 Beweisen Sie Satz 30: Eine Folge $\bigl(x^{(k)}\bigr)_{k=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn alle Koordinatenfolgen $\bigl(x_1^{(k)}\bigr)_{k=0}^{\infty}, \ldots, \bigl(x_n^{(k)}\bigr)_{k=0}^{\infty}$ konvergieren.

Aufgabe 5 Die *Newton-Cotes-Formeln* sind sogenannte Quadraturformeln, die der numerischen Approximation von Integralen dienen. Eine solche Formel, die Kepler'sche Fassregel, wurde bereits vorgestellt. Die Idee dabei ist, dass die zu integrierende Funktion durch ein Polynom angenähert wird; ein Näherungswert für das Integral ergibt sich dann durch Integrieren dieses Polynoms.

Zur Auswertung des Integrals $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ wird das Intervall $[0,1]$ äquidistant zerlegt, so dass man *Stützstellen* $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{n}$, …, $x_n = 1$ erhält. Die Newton-Cotes-Formel vom Grad n hat dann die Form

$$\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

wobei die Zahlen w_i *Gewichte* genannt werden. Schreiben Sie ein Programm in Sage, welches zu gegebenem n die Gewichte der entsprechenden Newton-Cotes-Formel berechnet.

Hinweise: Berechnen Sie zunächst das Polynom n-ten Grades, welches an jeder Stützstelle x_i genau den Funktionswert $f(x_i)$ annimmt (die Koeffizienten dieses Polynoms können z.B. durch ein lineares Gleichungssystem bestimmt werden). Eine beliebig lange Liste von Variablen kann in Sage wie folgt erzeugt werden:

```
v = list(var('v%d' % i) for i in range(n + 1))
```

Zum Vergleich: die Gewichte für $n = 2$ lauten $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$ (siehe Übungsblatt 6), für $n = 3$ erhält man $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$.