Übungsblatt 5

Besprechung am **29.11.2012**

Aufgabe 1 Berechnen Sie - sofern existent - die Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x \log\Big(1 + \dfrac{1}{x}\Big)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{\exp(x) + \exp(-x)}$

Aufgabe 2 Berechnen Sie zu jeder der angegebenen Funktionen alle lokalen Extremwerte. Welche sind auch globale Extremwerte?

a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^5 - x^4 + x^3 - 7x^2 + 10x - 16$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{|x|}{x^2 + 1}$

Aufgabe 3 Beweisen Sie: Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.

Aufgabe 4 Das Newton-Verfahren berechnet für eine differenzierbare Funktion $f(x) : D \to \mathbb{R}$ und gegebenen Startwert $x_0 \in D$ die Folge $x_1, x_2, \ldots$ gemäß der Rekursionsformel

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

so dass im Fall der Konvergenz $\lim_{n\to\infty} x_n$ eine Nullstelle von $f(x)$ ist. Beweisen Sie, dass für beliebiges $a > 0$ das Newton-Verfahren, angewandt auf

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - a,$$

für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ konvergiert. Zeigen Sie dazu, dass die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt und streng monoton steigend bzw. fallend ist, wenn $|x_0| > \sqrt{a}$. Was passiert im Fall $|x_0| < \sqrt{a}$?

Aufgabe 5 Schreiben Sie eine Funktion in Sage, die zu einem gegebenen Polynom alle Nullstellen, sowie lokale Minimal- und Maximalstellen ausgibt. Verwenden Sie neben den Grundrechenarten nur die Funktionen `diff()` und `solve()` (Hinweis: optionaler Parameter `solution_dict`). Testen Sie Ihre Funktion mit dem Polynom aus Aufgabe 2a, sowie für das Polynom $x^{10} - 4x^9 + 6x^8 - 4x^7 + x^6$.