Übungsblatt 4

Besprechung am **22.11.2012**

Aufgabe 1 Zeigen Sie zunächst, dass $(\sin(x))' = \cos(x)$. In welchen Punkten ihres Definitionsbereichs ist die Umkehrfunktion des Sinus

$$f\colon \big[0,1\big] \to \big[0,\tfrac{\pi}{2}\big], \quad f(x) = \sin^{-1}(x) =: \arcsin(x)$$

stetig?

Aufgabe 2 Untersuchen Sie Stetigkeit der Funktion $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{wenn } x = \frac{p}{q} \text{ mit } p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in einem Punkt x_0. Unterscheiden Sie dafür die Fälle $x_0 \in \mathbb{Q}$ und $x_0 \notin \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

$$f_1(x) = \log(\log(x)), \qquad f_2(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}, \qquad f_3(x) = 2^{\sqrt{x}}, \qquad f_4(x) = x^x.$$

Aufgabe 4 Die Funktion $W\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist implizit durch die Gleichung

$$W(x)\exp(W(x)) = x \qquad (x > 0)$$

definiert (Lambertsche W-Funktion). Zeigen Sie, dass W auf $(0,\infty)$ differenzierbar ist, und dass gilt

$$W'(x) = \frac{W(x)}{(W(x)+1)x} \qquad (x > 0).$$

Aufgabe 5 Schreiben Sie eine Funktion in Sage, die eine gegebene (hinreichend oft differenzierbare) Funktion $f(x)$ durch ihre Taylorpolynome

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

approximiert. Neben der Funktion f selbst sollen noch zwei weitere Parameter a und n übergeben werden. Ihr Programm soll die ersten n Taylorpolynome $T_0, \ldots, T_{n-1}$ berechnen und daraus eine Grafik erstellen, die diese zusammen mit dem Funktionsgraphen von f im Intervall $[-a, a]$ plottet. Testen Sie Ihr Programm für verschiedene Funktionen, die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben!