Vorlesung Mathematik und Logik **Wintersemester 2012**

Probeklausur

Besprechung am **1.2.2013**

Aufgabe 1 [2 Punkte] Besitzt die Zahl $a = 48$ in $\mathbb{Z}_{79}$ eine multiplikative Inverse?

☐ Ja, weil

☐ Nein, weil

Aufgabe 2 [2 Punkte] Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass jedes Element im Wertebereich $f(X)$ genau ein Urbild in X besitzt. Dann gilt:

☐ f ist injektiv

☐ f ist surjektiv

☐ f ist bijektiv

Aufgabe 3 [2 Punkte] Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$ eine Relation. Welche Eigenschaften muss R erfüllen um eine Äquivalenzrelation zu sein?

- Die Primzahlen unter 100 sind:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.$$

- Seien A, B, C Aussagen, dann gilt

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

und

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B, \quad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B, \quad A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

Aufgabe 4 [6 Punkte] Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 5 [6 Punkte]

(a) Seien A, B, C Aussagen. Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln das Distributivgesetz

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

(b) Seien A, B Aussagen. Zeigen Sie durch Anwenden von logischen Umformungen, dass die Aussage $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ eine Tautologie ist.

(c) Negieren Sie die quantifizierte Aussage

$$\exists\, x, x \in \mathbb{R}\, \forall\, y, y \in \mathbb{R} \colon xy > 1.$$

Aufgabe 6 [6 Punkte]

(a) Gegeben ist die Funktion

$$f \colon \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5, \qquad x \mapsto (x^2 \mod 5).$$

Bestimmen Sie das Bild $f(\mathbb{Z}_5)$. Stellen Sie fest ob die Funktion injektiv, surjektiv oder bijektiv ist. Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(b) Gegeben ist die Funktion

$$g \colon [0,3] \to [-1,1], \qquad x \mapsto \frac{2x+1}{x+5}.$$

Bestimmen Sie $g^{-1} \colon [-1,1] \to [0,3]$. Für welches $x \in [-1,1]$ gilt $g(x) = \frac{1}{2}$?

Aufgabe 7 [6 Punkte] Seien $X = \{2,3,4\}$ und $Y = \{1,2,3\}$.

(a) Geben sie die Mengen $A = X \times X$ und $B = Y \times Y$ explizit an.

(b) Bestimmen Sie die Menge $A \backslash B$.

(c) Geben Sie die Potenzmenge $C = P(X)$ explizit an und zeichnen Sie das Hasse-Diagramm der Ordnungsrelation $R \subseteq C \times C$, wobei $xRy \Leftrightarrow x \subseteq y$.