14. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Man berechne A^{-1} mit der Determinanten-Formel:

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad (b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Aus $A^{-1} = (\det A)^{-1}\, C(A)^t$ erkläre man, warum A^{-1} eine obere Dreiecks-Matrix ist, falls A eine obere Dreiecks-Matrix ist.

3. Mittels Cramer-Regel löse man das System

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 4\,y & - & z & = & 1 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2\,x & & & + & 3\,z & = & 0 \end{array}.$$

4. Sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ mit $(a, b) \neq (0, 0)$ und

$$U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax + by = 0\}.$$

Man zeige $U \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ und bestimme $\dim U$.

5. Sei

$$U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : \ 3\,x_1 - 2\,x_3 + x_4 = 0\}.$$

(a) Man beweise $U \leq_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$. (b) Man bestimme eine Basis von U.

6. Seien U_1, U_2, W Teilräume eines K-Vektorraums V. Man gebe einen Beweis oder ein Gegenbeispiel zu folgenden Behauptungen:

(a) Falls $U_1 + W = U_2 + W$, dann $U_1 = U_2$.

(b) Falls $V = U_1 \oplus W$ und $V = U_2 \oplus W$, dann $U_1 = U_2$.