11. Übungszettel
Lineare Algebra und Analytische Geometrie I
WS 2012/13

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$f\left((x_1, \dots, x_n)\right) = x_1\, f(e_1) + \cdots + x_n\, f(e_n)$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. ($e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ ist der j-te Einheitsvektor im $\mathbb{R}^n$.) (a) Man zeige, die Abbildung f ist linear. (b) Falls $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, wäre die Abbildung dann noch immer linear?

2. Für Matrizen A, B, C mit Elementen aus einem Körper K gelten die Distributivgesetze

$$A(B + C) = AB + AC \text{ und } (A + B)C = AC + BC,$$

vorausgesetzt, alle auftretenden Verknüpfungen sind definiert. Welche Form müssen A, B, C dafür im Allgemeinen haben? Man verifiziere die zwei Gesetze anhand der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } C = AB.$$

3. Seien $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ und $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

skizziere man die Kurven der Bildmengen $h_A(G)$ und $h_A(K)$. (Bemerkung: $h_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist die zu A assoziierte lineare Abbildung.)

4. Sei $\rho(\alpha) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Spiegelung der Ebene um die Gerade $\mathbb{R}\binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Mittels der darstellenden Matrizen beweise bzw. widerlege man: $\rho(0) \circ \rho(\pi/2) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist die Rotation der Ebene im Nullpunkt um $180°$. Was ergibt $\rho(\pi/2) \circ \rho(0)$?

Bonusbeispiel 1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mittels der "n^2-Methode" finde man $B \in \mathrm{M}(3 \times 3; \mathbb{R})$ so, daß $AB = I_3$. Man berechne BA.
Hinweis: Die "n^2-Methode" finden Sie in den Vorlesungsunterlagen auf Seite MG 31 und MG 32.

Bonusbeispiel 2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2$$