

# Übungsblatt 10

<http://www.risc.uni-linz.ac.at/education/courses/ws2009/mathematik2>

Besprechung am 28.1.2010

---

**Aufgabe 1** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mittels Taylorentwicklung. Dazu berechnen Sie die ersten Terme der Taylorentwicklung von Nenner und Zähler der gegebenen Funktionen um den Punkt  $x_0$ , gegen den  $x$  strebt. Dann kürzen Sie die entsprechenden Potenzen von  $x - x_0$ , um abschließend durch Einsetzen  $x = x_0$  den Grenzwert zu erhalten.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(2x) - 4x^2}{\cos x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{\cos^2 x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin(\pi x)}$$

**Aufgabe 2** Berechnen Sie alle partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung der Funktion

$$\ln \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Aufgabe 3** (a) Bestimmen Sie die Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$ , so dass die Funktion

$$u(x, t) = e^{at} (\sin x - bx^2)$$

die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

erfüllt.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion  $w(x, t) = g(x - kt)$  (falls  $g$  differenzierbar ist) die Transportgleichung

$$\frac{\partial w}{\partial t} + k \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

erfüllt.

**Aufgabe 4** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

im Punkt  $(0, 0)$  nicht stetig ist, indem Sie zwei Nullfolgen  $(x_n, y_n)$  finden, für die  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n)$  gegen unterschiedliche Grenzwerte strebt.

**Aufgabe 5** Schreiben Sie ein Programm in Sage, das die Taylorreihe einer gegebenen Funktion um einen Entwicklungspunkt  $x_0$  bis zu einer gegebenen Ordnung  $r$  berechnet. Verwenden Sie dazu die Prozedur zur symbolischen Ableitung eines gegebenen Ausdruck von Blatt 6 und testen Sie Ihr Programm an den Funktionen aus Aufgabe 1.