Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

8. Übungsblatt für den 14.5.2007

58. Warum ist folgender „Beweis“ des Satzes von Cayley-Hamilton inkorrekt:

    Satz von Cayley-Hamilton: $\bar{c}_A(A) = 0$
    Beweis: $\bar{c}_A(x) = \det(Ex - A) \Rightarrow \bar{c}_A(A) = \det(EA - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$

59. Berechnen Sie A^{-1} für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe von c_A von Hand, machen Sie aber die Probe mit MATHEMATICA.

60. Berechnen Sie A^7 für obiges *A* mit Hilfe von c_A und machen Sie die Probe mit MATHEMATICA.

61. Sei A die Matrix aus Übung 24.
    Besitzt *A* eine Jordan’sche Normalform? Falls ja, bestimmen Sie sie und überprüfen Sie die Normalform mit MATHEMATICA (**JordanDecomposition[A]**)

62. Gegeben sei folgendes „Leslie-Matrix-Populationsmodell“

$$L = \begin{pmatrix} 1/4 & 9/8 & 11/16 & 1/8 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Interpretation:
- in der ersten Zeile der „Leslie-Matrix“ steht die mittlere Anzahl der Nachkommen in den vier Altersklassen
- „dreimal“ ½ darunter bedeutet, dass aus jeder Altersklasse 50% überleben und in die jeweils nächste Alterklasse kommen
- x_0 gibt die „Anfangsbevölkerung“ in den 4 Altersklassen an

bestimmen Sie die Population nach „sehr langer Zeit“ durch Überführen von L in eine geeignete Normalform
(Nebenrechnungen mit MATHEMATICA erlaubt)