Lineare Algebra II · Sommer 2007 · Übungsblatt 5

Aufgabe 35 Sei V der (unendlich-dimensionale) Vektorraum aller konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: Die lineare Abbildung

$$L\colon V \to V, \quad a := (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} a_n, \dots)$$

ist eine Projektion.

Aufgabe 36 Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die

$$A(\alpha) := \begin{pmatrix} -2(\alpha-1) & 1-2\alpha & 1-2\alpha \\ 1 & \alpha & \alpha-1 \\ 1 & \alpha-1 & \alpha \end{pmatrix}$$

die Abbildungsmatrix einer Projektion ist.

Aufgabe 37 Bestimmen Sie alle regulären Projektionen.

Aufgabe 38 Konstruieren Sie eine lineare Abbildung, die den Raum $\mathbb{R}^4$ parallel zu

$$V = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \quad \text{auf} \quad U = \operatorname{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix})$$

projiziert.

Aufgabe 39 Zeigen Sie: Ist V ein IP-Raum und $W \subseteq V$, so ist

$$(W^\perp)^\perp = \operatorname{span}(W).$$

Aufgabe 40 Berechnen Sie das orthogonale Komplement von U aus Aufgabe 38 in $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 41 Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{15} & -\frac{8\sqrt{2}}{15} & \frac{3}{5} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

orthogonal bzgl. des Standardinnenprodukts auf $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 42 Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Die Eigenschaft einer linearen Abbildung $V \to V$, Isometrie zu sein, ist unabhängig vom Innenprodukt auf V.

b) Die Menge aller Isometrien $V \to V$ bildet einen Untervektorraum von $\operatorname{Hom}(V, V)$.

Aufgabe 43 Sei V ein IP-Raum. Zeigen Sie:

a) Jede Isometrie $h\colon V \to V$ ist injektiv.

b) Ist $\dim V < \infty$, so gilt $\det A = \pm 1$ für jede Darstellungsmatrix A einer Isometrie auf V.

Aufgabe 44 Gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$, das die Matrix $A(\alpha)$ aus Aufgabe 36 zu einer Isometrie macht?