Lineare Algebra II · Sommer 2007 · Übungsblatt 4

Aufgabe 26 Sei V ein reeller Innenproduktraum. Zeigen Sie:

a) $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2\langle x|y\rangle \quad (x, y \in V)$

b) $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2 \quad (x, y \in V)$

Aufgabe 27 Sei V ein Innenproduktraum. Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung lautet

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \quad (x, y \in V).$$

Charakterisieren Sie die Vektoren x, y, für die Gleichheit gilt.

Aufgabe 28 Sei $A \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ und $x, y \in \mathbb{R}^2$ sei sei $\langle x|A|y\rangle := x^T Ay$. Ist $\langle \cdot|A|\cdot\rangle$ ein Innenprodukt auf $\mathbb{R}^2$, wenn

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$,

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$?

Aufgabe 29 Der Untervektorraum U von $\mathbb{R}^4$ sei gegeben durch

$$U = \mathrm{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

a) Bestimmen Sie eine orthonormale Basis von U.

b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $x = (84, 42, -123, -63) \in U$ bezüglich Ihrer Orthonormalbasis.

c) Sie sind Übungsleiter und wollen eine Aufgabe vom selben Typ wie 29.b) konstruieren. Dazu suchen Sie ein $x \in U$ mit „schönen“ Fourierkoeffizienten. Wie gehen Sie vor?

Aufgabe 30 Zeigen Sie:

a) Mit $\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$ wird $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ zu einem Innenproduktraum.

b) Mit $\langle A, B\rangle := \mathrm{spur}(B^T A)$ wird $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ zu einem Innenproduktraum.

Aufgabe 31 Zeigen Sie die Ungleichung

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x \, \cos x} \leq 1.$$

Hinweis: Führen Sie die Ungleichung auf die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zurück.

Aufgabe 32 Der Vektorraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ aller Polynome mit Grad höchstens 3 sei versehen mit dem Innenprodukt

$$\langle f|g\rangle := \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)g(t)\,dt.$$

a) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis C zu $\langle\cdot|\cdot\rangle$, indem Sie das Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmitt auf die Standardbasis $\{1, x, x^2, x^3\}$ anwenden. (Sie dürfen Computeralgebra zum Auswerten von Integralen einsetzen.)

b) Kommen Ihnen die Elemente von C irgendwie bekannt vor?

Aufgabe 33 Sei $V = \mathbb{R}^3$ und

$$h\colon V \to V, \qquad h(x) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 & 4\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & 3\sqrt{2} & -\sqrt{6} \\ 2\sqrt{3} & -3\sqrt{2} & -\sqrt{6} \end{pmatrix} x$$

Ist h ein innerer Produktisomorphismus?

Aufgabe 34 Sei $V = C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ der (unendlich-dimensionale) Vektorraum der reellen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi,\pi]$, versehen mit dem Innenprodukt

$$\langle f|g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

a) Zeigen Sie, daß die Funktionen

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin(2x),\ \cos(2x),\ \sin(3x),\ \cos(3x),\ \ldots$$

zueinander orthogonal sind.

b) Überführen Sie das obige Orthogonalsystem durch Normierung in ein Orthonormalsystem T.

c) Bestimmen Sie die ersten Koeffizienten der Fourierentwicklung der Funktion $x \mapsto x^2$ bezüglich des Orthonormalsystems T.