Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2, SS 07
3. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 26.03.2007

18. Sei h die Spiegelungsabbildung aus Übung 8, Blatt 1.
(a) Überlegen Sie sich rein geometrisch, wie die Eigenvektoren, Eigenwerte und Eigenräume dieser Abbildung aussehen müssen.
(b) Berechnen Sie die Eigenwerte, Eigenvektoren und Eigenräume und vergleichen Sie mit (a).
(c) Überprüfen Sie die Resultate mit Mathematica oder einem anderen CAS und vergleichen Sie mit (a) und (b).

19. Eine Bakterienkultur bestehe aus 200 Bakterien vom Typ I, 300 vom Typ II und 1000 vom Typ III. Von einer Generation x_i zur nächsten x_i‘ ändert sich die Bakterienpopulation gemäß:

$$x_1' = \frac{87}{70} x_1 + \frac{8}{35} x_2$$
$$x_2' = \frac{3}{35} x_1 + \frac{67}{70} x_2$$
$$x_3' = \frac{11}{10} x_3$$

(a) Wie viele Bakterien existieren nach 12 Generationen?
(b) Bestimmen Sie das <u>Verhältnis</u> der drei Bakterientypen zueinander nach sehr langer Zeit.

20. Lösen Sie folgendes gekoppelte System linearer Differentialgleichungen:

$$\begin{pmatrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ f_3'(x) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix} \text{ mit } A \text{ aus Beispiel 16, Anfangsbedingungen: } \begin{pmatrix} f_1(0) \\ f_2(0) \\ f_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

21. Berechnen Sie A^{-1} und A^3 für $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit Hilfe des charakteristischen Polynoms

22. (a) Sei V ein Vektorraum, wobei dim(V) <u>nicht notwendigerweise endlich</u> ist und sei $h:V\to V$ linear. Zeigen Sie: $\lambda\in\mathbb{R}$ ist Eigenwert von h $\Leftrightarrow$ $-h + \lambda\, id_V$ ist nicht injektiv.
(b) Zeigen Sie <u>mit Hilfe von (a)</u> folgende bereits bekannte Aussage:
Ist dim(V) **endlich**, so gilt weiters (mit $c_h := c_{A(h;B,B)}$ für eine Basis B)
$\lambda\in\mathbb{R}$ ist Eigenwert von h $\Leftrightarrow$ $c_h(\lambda)=0$

23. Zeigen (Beweis) oder widerlegen (Gegenbeispiel) Sie jeweils folgende Aussagen:

(a) Sei $A\in K_n^n$ regulär, dann gilt: λ ist Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ λ^{-1} ist Eigenwert von A^{-1}
(b) Sei $A\in K_n^n$ regulär, dann gilt: λ ist Eigenwert von A $\Rightarrow$ $k\,\lambda$ ist Eigenwert von $k\cdot A$
(c) $c_A = 0 \Leftrightarrow A = 0$
(d) $c_{AB} = c_A + c_B$

24. Sei $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6_6$ Bestimmen Sie das **Minimal**polynom von A

(„Nebenrechnungen" dürfen Sie mit dem Computer durchführen)

25. Sei A wie in Bsp. 24 (Sie dürfen „Nebenrechnungen" mit dem Computer ausführen)
(a) Bestimmen Sie Eigenwerte, -vektoren und –räume von A, sowie algebraische und geometrische Vielfachheiten
(b) Beantworten Sie die Frage, on A diagonalisierbar ist, mit Hilfe von (a)