Übungen zu Linearer Algebra und Analytischer Geometrie II
1.Übungsblatt, auszuarbeiten für 12.3.2007

1. Eine kurze exakte Sequenz ist eine exakte Sequenz der Form

$$\{0\} \rightarrow^{f_1} V_1 \rightarrow^{f_2} V_2 \rightarrow^{f_3} V_3 \rightarrow^{f_4} \{0\}$$

   V_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, sind Vektorräume über einem Körper K, $\{0\}$ ist der triviale Vektorraum über K.

   Zeigen Sie:

   (a) f_2 ist injektiv, f_3 ist surjektiv.

   (b) Sind V, W Vektorräume über dem Körper K und ist $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung, so ist

$$\{0\} \rightarrow^{f_1} kern(f) \rightarrow^{f_2} V \rightarrow^{f_3} im(f) \rightarrow^{f_4} \{0\}$$

   eine kurze exakte Sequenz. Geben Sie die Abbildungen f_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, explizit an.

   (c) Ist U eine Unterraum eines Vektorraums V über K, so ist

$$\{0\} \rightarrow^{f_1} U \rightarrow^{f_2} V \rightarrow^{f_3} V/U \rightarrow^{f_4} \{0\}$$

   eine kurze exakte Sequenz. Geben Sie die Abbildungen f_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, explizit an.

2. Gegeben sind die linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x-y, 3x, y)$ und $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(x, y, z) = (2x - y - z, x + y)$. Seien $B := \{(1, 0), (1, 1)\}$ und $C := \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ Basen von $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$.

   (a) Berechnen Sie die Matrixdarstellungen von f und g bezüglich dieser Basen.

   (b) Berechnen Sie die Matrixdarstellungen von $f \circ g$ und $g \circ f$ bezüglich dieser Basen.

   (c) Ist $f \circ g$ bzw. $g \circ f$ ein Automorphismus?

3. Berechnen Sie, falls möglich, die Umkehrfunktionen der linearen Abbildungen:

   (a) $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, h(x, y, z) = (x - y + 3z, 2x + 4y + z, -2x + y + 3z)$

   (b) $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, g(x, y, z) = (2x - y + 3z, 4x + 2y + z, 2x + 3y - 2z)$

4. Geben Sie für g und h aus Beispiel 3 die Abbildungsvorschrift $(2g \circ h + 3h^2 - h^{-1})(x, y, z) =$ ...... an.

5. Berechnen Sie für die Basen $B = \{(1, 2, -2), (-1, -1, 1), (2, 1, -3)\}$ und $C = \{(1, -1, 1), (2, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ von $\mathbb{R}^3$ die Basistransformationsmatrizen A_C^B und A_B^C.

6. Sei $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, h(x, y, z, u) = (x + 2y - 3z + u, 2x - y - z + 3u, -x + 3y + 3z - 3u)$.

   (a) Bestimmen Sie $A(h, B, C)$ für die kanonischen Basen B, C.

   (b) Berechnen Sie Matrizen P und Q, sodass $P \cdot A(h, B, C) \cdot Q$ Normalform hat.

7. (Fortsetzung von Bsp. 6) Bestimmen Sie Basen B_1 von $\mathbb{R}^4$ und C_1 von $\mathbb{R}^3$, sodass $A(h, B_1, C_1)$ in Normalform ist.

8. Spiegelungen von Punkten an einer Ebene durch den Nullpunkt im $\mathbb{R}^3$ sind lineare Abbildungen. Sei h die lineare Abbildung, die jeden Punkt an der Ebene $e := x + 2y + 2z = 0$ spiegelt. Berechnen Sie die Matrixdarstellung $A(h, B, B)$ bezüglich der kanonischen Basis.

   Hinweis:

   Gehen sie folgendermaßen vor: Berechnen Sie zunächst $A(h, C, C)$ für eine Basis C von $\mathbb{R}^3$ bei der sich die Spiegelung einfach berechnen lässt. Anschließend führen Sie eine Basistransformation durch.