Lineare Algebra II · Sommer 2007 · Übungsblatt 13

Aufgabe 94 Sei $p(x, y) = 2x^4 + 5y^4 - x^2y^2 + 2x^3y$.

a) Zeigen Sie: $\forall x, y \in \mathbb{R} : p(x, y) \geq 0$.

Hinweis: Konstruieren Sie eine positiv definite quadratische Form $q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $p(x, y) = q((x^2, y^2, xy)^T)$. Verwenden Sie Mathematica für Nebenrechnungen.

b) Finden Sie eine Darstellung von $p(x, y)$ als Summe von Quadraten.

Hinweis: Schreiben Sie die Darstellungsmatrix von q aus a) in der Form $U^T DU$ für ein invertierbares U und eine geeignete Diagonalmatrix D. Verwenden Sie Mathematica für Nebenrechnungen.

Gemeine Zusatzfrage (muß nicht bearbeitet werden): Geht das immer?

Aufgabe 95 Sei $S = \{(x, \frac{1}{x}) : x > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie alle unterstützende Hyperebenen von S beim Ursprung $(0, 0)$.

Aufgabe 96 Bestimmen Sie die Punkte $x \in \mathbb{R}^2$, für die

$$c(x) := (2, -3) \cdot x$$

unter der Nebenbedingung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

maximal wird.

Hinweis: Eine informale Lösung (z. B. auf geometrischer Intuition basierend) genügt.

Aufgabe 97 Bestimmen Sie die Punkte $x \in \mathbb{R}^3$, für die

$$c(x) := (2, -3, 1) \cdot x$$

unter der Nebenbedingung

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

maximal wird.

Hinweis: Eine informale Lösung (z. B. auf geometrischer Intuition basierend) genügt.

Aufgabe 98 Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Zeigen Sie:

$$A + B := \{\, a + b : a \in A, b \in B \,\}$$

ist konvex.

Aufgabe 99 Seien $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^n$. Die Kurve

$$\gamma = \{\, (1-t)^3 p_0 + 3t(1-t)^2 p_1 + 3t^2(1-t) p_2 + t^3 p_3 : t \in [0, 1] \,\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

bezeichnet man als *kubische Bezierkurve* zu den *Kontrollpunkten* $p_0, \ldots, p_3$. Bezierkurven finden vielfältige Anwendungen in der graphischen Datenverarbeitung (z. B. basiert PostScript auf solchen Kurven).

a) Zeigen Sie: Jede kubische Bezierkurve liegt in der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte.

b) Skizzieren Sie die kubische Bezierkurve für folgende Kontrollpunkte:

$$p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 100 Sagen Sie uns Ihre Meinung!
Hinweis: Nutzen Sie dazu die Umfragefunktion von KUSSS.

Schöne Ferien!