Übungen zu Linearer Algebra und Analytischer Geometrie II
12.Übungsblatt, auszuarbeiten für 18.6.2007

87. Sei $\sigma : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}, (\vec{x}, \vec{y}) \mapsto \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}.$

    (a) Finden Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^4$, sodass

    $$A(\sigma, B, B) = diag(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1, 0, \ldots, 0)$$

    (b) Bestimmen Sie Index und Signatur von σ.

88. Gegeben ist der Vektorraum $V = \mathbb{R}^n$. Sei e_0 der Nullvektor und $e_1, \ldots, e_n$ die kanonischen Basisvektoren. Zeigen Sie: $x \in \mathbb{R}^n$ liegt in der konvexen Hülle von $e_i, i \in \{0, \ldots, n\} \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, n\} : x_i \geq 0$ und $x_1 + \ldots + x_n \leq 1$

89. Sei $r > 0$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ ist konvex.

90. Zeigen Sie: $\{x \in R^n \mid |x_i| \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$ ist konvex.

91. Gegeben ist der Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$. Sei AB eine Strecke im $\mathbb{R}^2$. Weisen Sie nach, dass AB die konvexe Hülle ihrer Endpunkte ist. Der Beweis sollte nicht durch eine Skizze erfolgen.

92. Gegeben ist der Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$. Sei ABC ein Dreieck in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Die Fläche des Dreiecks ist die konvexe Hülle seiner Eckpunkte. (Der Beweis sollte wiederum rechnerisch erfolgen.)

    In der linearen Optimierung geht es darum, Zielfunktionen auf speziellen Teilmengen M des $\mathbb{R}^n$ zu optimieren. M hat dabei meist die Form $M := \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x \leq b, x \geq 0\}$. A ist dabei eine $m \times n$ Matrix, b ein Vektor in $\mathbb{R}^m$. $x \geq 0$ bedeutet, dass alle Einträge des Vektors größer oder gleich Null sind. M ist sozusagen ein System von Ungleichungen.

93. Weisen Sie nach, dass M eine konvexe Menge ist. (Dies ist wichtig für die Existenz von Optima.)