Übungen zu Lineare Algebra und Analytische Geometrie II

11. Übungsblatt für den 11.6.2007

79. Sei V=$P_3(\mathbb{R})$, sei B die kanonische Basis und sei σ: V×V $\to \mathbb{R}$, $(p,q) \to \int_0^1 p(x)q(x)dx$

    Bestimmen Sie A(σ;B,B)

80. Zeigen oder widerlegen Sie für eine quadratische symmetrische Matrix A über $\mathbb{R}$:
    (a) A ist positiv definit ⇔ Der Index von A ist gleich *n*.
    (b) A ist negativ definit ⇔ Die Signatur von A ist gleich -*n*.

81. Ist σ : $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $((a,b,c),(x,y,z)) \to ay+bx-az-cx+2by+4bz+4cy$
    eine positiv definite symmetrische Bilinearform?

82. Zeigen oder widerlegen Sie jeweils für quadratische Matrizen A, B über einem Körper K (also nicht notwendigerweise über $\mathbb{R}$) :
    (a) A ist kongruent zu einer Diagonalmatrix ⇒ A ist symmetrisch
    (b) A, B positiv definit ⇒ AB positiv definit

83. <u>Definition:</u> Sei A eine quadratische Matrix über einem Körper K. Eine Darstellung A = L L^T, wobei L eine linke untere Dreiecksmatrix ist, heißt *Cholesky-Zerlegung*. Eine solche existiert etwa, wenn A eine positiv definite symmetrische Matrix ist.

    (a) Begründen Sie, dass für A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ eine Cholesky-Zerlegung existiert.

    (b) Finden Sie eine solche Faktorisierung! (Nebenrechnungen mit dem Computer erlaubt)

84. Zeigen Sie:
    Sei $m = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix}$ Mittelpunkt eines Kegelschnitts (verallgemeinerte quadratische Form) der Gestalt x^tAx + sx + f = 0, dann gilt:
    $$A \cdot m = -\frac{1}{2} s^t$$
    wobei „Mittelpunkt“ so definiert sei: $(m-x) \in$ Kegelschnitt ⇔ $(m+x) \in$ Kegelschnitt
    (<u>Hinweis:</u> Setzen Sie (m-x) und (m+x) in den Kegelschnitt ein und lösen Sie das entstehende Gleichungssystem mit Fallunterscheidung)

85. (Fortsetzung von 84) Zeigen Sie die Umkehrung von obigem Satz

86. Bestimmen Sie die Translation und die Drehung, die den Kegelschnitt
    $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 8y + 2 = 0$
    in seine Normalform überführt.
    (Nebenrechnungen mit dem Computer erlaubt)