5 Vektorräume

Was wir in den vorangegangenen Kapiteln an Matrizen und Vektoren gesehen haben, wollen wir nun mathematisch abstrahieren. Das führt auf den Begriff des Vektorraumes, den zentralen Begriff in der Linearen Algebra.

Definition 5.1: *Sei $K = (K, +, \cdot)$ ein Körper. Ein* **Vektorraum über** *K ist eine Menge V mit einer Operation $+ : V \times V \longrightarrow V$ (***Addition***) und einer Operation $\cdot : K \times V \longrightarrow V$ (***Skalarmultiplikation***), für welche die folgenden Axiome gelten:*

(V1) für alle $x, y \in V$: $x + y = y + x$;

(V2) für alle $x, y, z \in V$: $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(V3) es gibt ein Element 0 in V, sodass für alle $x \in V$: $x + 0 = x$;

(V4) für jedes $x \in V$ gibt es $-x \in V$, sodass $x + (-x) = 0$;

(V5) für alle $x, y \in V$ und $\lambda \in K$: $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$;

(V6) für alle $x \in V$ und $\lambda, \mu \in K$: $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$;

(V7) für alle $x \in V$ und $\lambda, \mu \in K$: $(\lambda \cdot \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$;

(V8) für alle $x \in V$: $1 \cdot x = x$.

Die Elemente des Vektorraums V nennen wir **Vektoren***. $0 \in V$ heisst der* **Nullvektor***. Einen Vektorraum nennen wir auch manchmal einen* **linearen Raum***.*

Die Axiome (V1) bis (V4) drücken aus, dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist.
Meist schreiben wir die Operation "$\cdot$" der Skalarmultiplikation nicht an, sondern drücken das Skalarprodukt aus als λx.
Um eine Verwechslung der Nullelemente von K bzw. V zu vermeiden, schreiben wir – wenn nötig – 0_K bzw. 0_V.

Beispiel 5.2: Die Menge $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ der $m \times n$ Matrizen über dem Körper K bildet einen Vektorraum. Das haben wir in den Sätzen 2.1.5, 2.1.6, 2.1.7, 2.1.9 nachgewiesen.
Insbesondere sind $\mathrm{Mat}_{1\times n}(K)$ bzw. $\mathrm{Mat}_{m\times 1}(K)$, also die Zeilenvektoren der Länge n bzw. die Spaltenvektoren der Länge m, Vektorräume.
Die Menge der Zeilenvektoren $\mathrm{Mat}_{1\times n}(K)$ ist offenbar nur eine andere Schreibweise für das kartesische Produkt K^n. Also ist K^n ein Vektorraum über K. □

Beispiel 5.3: Sei $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Für zwei Funktionen $f, g \in \mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definieren die Addition von f und g wie folgt:

$$\begin{array}{rccc} f+g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad .$$

Weiters definieren wir für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ die Skalarmultiplikation wie folgt:

$$\begin{array}{rccc} \lambda f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda f(x) \end{array} \quad .$$

Nimmt man als Nullvektor die Nullfunktion, welche jedes $x \in \mathbb{R}$ auf 0 abbildet, und als $-f$ die Funktion, welche x abbildet auf $-f(x)$, so weist man leicht nach, dass $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit diesen Operationen ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist. □

Beispiel 5.4: Sei $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynome $p(x)$ in $\mathbb{R}[x]$ mit $\mathrm{grad}(p) \leq n$. Also

$$\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}) = \{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R}\} .$$

Auf $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ haben wir die übliche Addition (welche aus der Menge nicht hinausführt) und die (Skalar-)Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Polynome vom Grad kleiner gleich n bilden einen Vektorraum über $\mathbb{R}$, wenn wir als Nullvektor das Nullpolynom wählen, und für

$$p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

setzen

$$-p(x) = -a_n x^n - \cdots - a_1 x - a_0 . \qquad \square$$

Beispiel 5.5: Jede komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als

$$c = a + bi, \quad \text{für } a, b \in \mathbb{R} .$$

Dabei ist $a = \mathrm{re}(c)$ und $b = \mathrm{im}(c)$. Solche Darstellung lassen sich addieren und mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ multiplizieren. $\mathbb{C}$ ist also ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. □

Satz 5.6: *Ist V ein Vektorraum über dem Körper K, dann gilt:*

(i) $\forall \lambda \in K : \ \lambda 0_V = 0_V$;

(ii) $\forall x \in V : \ 0_K x = 0_V$;

(iii) $\forall \lambda \in K, x \in V : \ \lambda x = 0_V \Longrightarrow (\lambda = 0_K \lor x = 0_V)$;

(iv) $\forall \lambda \in K, x \in V : \ (-\lambda)x = -(\lambda x) = \lambda(-x)$.

Indem wir diese Zusammenhänge für Vektorräume beweisen, beweisen wir sie also gleichzeitig fuer Matrizen, Polynome, und Funktionenräume. Das ist der Vorteil der Abstraktion.

Definition 5.7: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Eine nicht-leere Teilmenge W von V heisst* **Teilvektorraum** *oder* **linearer Teilraum** *oder* **linearer Unterraum** *von V, wenn W abgeschlossen ist unter den Operationen in V; also wenn gilt*

(i) $\forall x, y \in W : \ x + y \in W$;

(ii) $\forall x \in W, \lambda \in K : \ \lambda x \in W$.

Ist W ein Teilraum von V, so enthält W offenbar ein Element x. Mit x enthält W auch $-x = (-1)x$. Somit enthält W auch den Nullvektor: $0 = x - x$. Jeder Teilvektorraum W von V über K ist also für sich ein linear Raum über K.

Beispiel 5.8: Sei V ein Vektorraum.

(i) Der Vektorraum V ist trivialerweise ein Teilvektorraum von sich selbst.

(ii) Wegen Satz 5.6.(i) ist $\{0_V\}$ ein Teilvektorraum von V.

(iii) $\mathbb{R}$ ist ein Teilvektorraum von $\mathbb{C}$, vgl. Beispiel 5.5.

(iv) Im reellen Vektorraum $\mathbb{R}^2$ (wobei also der Grundkörper $\mathbb{R}$ ist) ist die Teilmenge

$$X = \{(x,0)|x \in \mathbb{R}\}$$

ein Teilvektorraum. Ebenso natürlich auch

$$Y = \{(0,y)|y \in \mathbb{R}\} \ .$$

(v) Das Beispiel (iv) lässt sich verallgemeinern. In $\mathbb{R}^2$ lässt sich jede Gerade durch den Ursprung schreiben als

$$L = \{(x,y)|ax + by = 0\}$$

für bestimmte $a, b \in \mathbb{R}$. Der Winkel α, den L mit der x-Achse einschliesst, ist gegeben durch $\tan(\alpha) = -a/b$.
Die Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind auf L g.d.w.

$$ax_1 = -by_1 \quad \text{und} \quad ax_2 = -by_2 \ .$$

Somit gilt auch

$$a(x_1 + x_2) = -b(y_1 + y_2) \ ,$$

also

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \in L \ .$$

Ausserdem gilt auch für alle $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1) \in L \ .$$

Somit ist also jede Gerade L durch den Ursprung ein Teilvektorraum von $\mathbb{R}^2$. □

Satz 5.9: *Sei $\{V_i|i \in I\}$ eine Familie von Teilvektorräumen des Vektorraums V. Dann ist der Durchschnitt all dieser Teilvektorräume, also*

$$\bigcap_{i \in I} V_i \ ,$$

ebenfalls ein Teilvektorraum von V.

Im Gegensatz zu Satz 5.9 ist die Vereinigung von Teilvektorräumen i.a. kein Teilvektorraum. Etwa $X \cup Y$ aus Beispiel 5.8(iv) ist kein Teilvektorraum in $\mathbb{R}^2$.

Beispiel 5.10: Wegen Satz 3.36 ist die Lösungsmenge eines homogenen Systems linearer Gleichungen in n Variablen über dem Körper K ein Unterraum von K^n. □

Satz und Definition 5.11: *Sei S eine beliebige Teilmenge des Vektorraums V. Dann ist der Durchschnitt aller Teilvektorräume von V, welche S enthalten, wiederum ein Vektorraum von V. Wir bezeichnen diesen kleinsten Teilraum, der S enthält, mit $\langle S \rangle$.*

Beispiel 5.12: Wir betrachten Teilräume im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$.

(i) Ist $(x, y) \neq (0, 0)$, dann ist $\langle\{(x, y)\}\rangle$ die Gerade durch (x, y) und den Ursprung. $\langle\{(0, 0)\}\rangle = \{(0, 0)\}$.

(ii) Sind $(x, y), (u, v)$ verschieden vom Nullvektor und (u, v) kein Vielfaches von (x, y), dann ist $\langle\{(x, y), (u, v)\}\rangle = \mathbb{R}^2$.

In Kapitel 3 (3.15) haben wir schon Linearkombinationen von Zeilenvektoren betrachtet. Wir führen diesen Begriff nun für Vektorräume im allgemeinen ein.

Definition 5.13: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei S eine Teilmenge von V. Für $x_1, \ldots, x_n \in S$ (also endlich viele) und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ heisst*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Linearkombination von Elementen von *S.*

Die leere Summe von Vektoren ist der Nullvektor 0_V, dieser ist also auch eine Linearkombination von $\emptyset$.

Satz 5.14: *Ist V ein Vektorraum über dem Körper K und $S \subseteq V$, dann ist*

$$\langle S\rangle = \{v \in V \mid v \textit{ ist Linearkombination von Elementen von } S\} \; .$$

Insbesondere ist die Menge der Linearkombinationen ein Teilvektorraum von V.

Definition 5.15: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei S eine Teilmenge von V. Die Menge $\langle S\rangle$ der Linearkombinationen von Elementen von S heisst* **der von S aufgespannte Teilvektorraum**, *geschrieben* $\operatorname{span}(S)$, *oder auch die* **lineare Hülle** *von S. S heisst eine* **Spannmenge** *von* $\langle S\rangle = \operatorname{span}(S)$.

Beispiel 5.16:

(i) Im Vektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ betrachten wir die Vektoren

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-te Stelle}}}{1}, 0 \ldots, 0) \; .$$

Dann lässt sich jeder Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreiben als

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \; .$$

Also für $E = \{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ist $\operatorname{span}(E) = \mathbb{R}^n$.

(ii) Für $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ gilt $\operatorname{span}(S) = \operatorname{Pol}_n(\mathbb{R})$. □

Definition 5.17: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei S eine Teilmenge von V.*
S heisst **linear abhängig**, *wenn es (endlich viele) Elemente $x_1, \ldots, x_n \in S$ gibt und*

Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ (also mindestens ein Skalar von 0 verschieden), sodass sich der Nullvektor ausdrücken lässt als

$$0_V = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ .$$

Ist das nicht der Fall, so heisst S **linear unabhängig**.
Ein Vektor $x \in V$ heisst **linear abhängig von** S, *wenn* $x \in \operatorname{span}(S)$. □

Beispiel 5.18: (i) Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ der Vektor in $\mathbb{R}^n$, welcher überall 0 enthält, nur an der i-ten Stelle 1. Dann ist die Menge

$$\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

linear unabhängig.
(ii) In $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$ ist die Menge

$$\{x^i \mid 0 \leq i \leq n\} = \{1, x, \dots, x^n\}$$

linear unabhängig.
(iii) In $\mathrm{Fun}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bezeichnen wir für $a \in \mathbb{R}$ mit f_a die Funktion, welche alle reellen Zahlen auf 0 abbildet, nur a auf 1. Dann ist die Menge

$$\{f_a \mid a \in \mathbb{R}\}$$

linear unabhängig. □

Satz 5.19: *Sei V ein Vektorraum über K und $S \subseteq V$.*

(i) Die leere Menge $\emptyset \subseteq V$ ist immer linear unabhängig.

(ii) Enthält S den Nullvektor 0_V, so ist S linear abhängig.

(iii) Ist $x \in V \setminus \{0_V\}$, so ist die einelementige Menge $\{x\}$ linear unabhängig.

(iv) Sei $|S| \geq 2$. Dann ist S linear abhängig g.d.w. es ein $x \in S$ gibt, sodass x linear abhängig ist von $S \setminus \{x\}$, also $x \in \operatorname{span}(S \setminus \{x\})$.

Beispiel 5.20: Wir betrachten den Vektorraum $\mathrm{Pol}_2(\mathbb{R})$ über $\mathbb{R}$. und darin die Polynome

$$p(x) = 2 + x + x^2, \quad q(x) = x + 2x^2, \quad r(x) = 2 + 2x + 3x^2 \ .$$

Eine allgemeine Linearkombination

$$\lambda p(x) + \mu q(x) + \nu r(x)$$

dieser Polynome ist

$$(2\lambda + 2\nu) + (\lambda + \mu + 2\nu)x + (\lambda + 2\mu + 3\nu)x^2 \ .$$

Eine solche Linearkombination ist nur dann 0, wenn jeder Koeffizient 0 ist; also wenn

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ .$$

Die Koeffizientenmatrix diese linearen Gleichungssystems hat Rang 2, es existiert also wegen Satz 3.34 eine nicht-triviale Lösung λ_0, μ_0, ν_0. Somit ist

$$\lambda_0 p(x) + \mu_0 q(x) + \nu_0 r(x) = 0$$

eine nicht-triviale Linearkombination, welche 0 ergibt. Die Polynome $p(x), q(x), r(x)$ sind also linear abhängig. □

Definition 5.21: *Sei V ein Vektorraum und B eine Teilmenge von V. B ist eine* **Basis** *für V g.d.w.*
- *B linear unabhängig ist, und*
- *$V = \operatorname{span}(B)$.*

Beispiel 5.22:

(i) Die Menge der Einheitsvektoren

$$\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

ist eine Basis für $\mathbb{R}^n$. Diese Basis heisst auch die **natürliche** oder **kanonische** Basis von $\mathbb{R}^n$.

(ii) Die Menge der "Terme"

$$\{x^i \mid 0 \leq i \leq n\}$$

ist eine Basis für $\mathrm{Pol}_n(\mathbb{R}^n)$.

(iii) $\{1, i\}$ ist eine Basis des Vektorraums $\mathbb{C}$ über $\mathbb{R}$. Vgl. Beispiel 5.5.

(iv) Sei $\mathrm{Fol}(K) := K^{\mathbb{N}}$ (vgl. Def. 1.3.35) die Menge aller Folgen mit Elementen im Körper K. Analog zur Situation in $\mathbb{R}^n$ können wir die Einheitsfolgen $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ betrachten, wobei die einzige 1 in e_i an der i-ten Stelle steht. Dann ist die Menge der Einheitsfolgen

$$\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$$

wohl linear unabhängig, aber keine Basis für $\mathrm{Fol}(K)$.

Satz 5.23: *Eine nicht-leere Teilmenge B eines Vektorraums V ist eine Basis von V g.d.w. jedes Element von V eine eindeutige Darstellung als Linearkombination von Elementen von B hat.*

Satz 5.24: *Sei S eine linear unabhängige Teilmenge des Vektorraums V. Dann gibt es (mindestens) eine Basis B von V mit $S \subseteq B$.*

Der Beweis von Satz 5.24 verwendet das Lemma von Zorn und ist inkonstruktiv. D.h. es wird nicht explizit gezeigt, wie man für einen Vektorraum tatsächlich eine Basis finden könnte. Das kann unter Umständen ziemlich schwierig sei, oder auch schlicht unmöglich.

Korollar: *Jeder Vektorraum besitzt (mindestens) eine Basis.*

Der Beweis von Satz 5.24 ist ein reiner Existenzbeweis. Niemand weiss, wie man im Allgemeinen für einen beliebigen Vektorraum eine Basis finden könnte.

Satz 5.25: (Austauschsatz von Steinitz) *Sei V ein Vektorraum und seien $m, n \in \mathbb{N}^*$. Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine n-elementige Basis von V, und sei $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ eine m-elementige Menge linear unabhängiger Elemente von V. Dann ist $m \leq n$ und es gibt Indizes $i_1, \dots, i_{n-m} \in \{1, \dots, n\}$, sodass auch $\tilde{B} = \{c_1, \dots, c_m, b_{i_1}, \dots, b_{i_{n-m}}\}$ eine Basis von V ist.*

Korollar: *Hat der Vektorraum V ein Basis B mit n Elementen, so ist jede n-elementige linear unabhängige Menge eine Basis von V.*

Satz 5.26: *Hat der Vektorraum V eine endliche Basis B, dann ist jede Basis B' von V endlich und es gilt $|B| = |B'|$.*

Satz 5.27: *Je zwei Basen eines Vektorraum V sind gleich mächtig.*

Satz 5.28: *Sei V ein Vektorraum und S eine Teilmenge von V. FAÄ:*

(i) *S ist eine Basis von V.*

(ii) *S ist eine maximale linear unabhängige Teilmenge von V (also ist $T \subseteq V$ linear unabhängig mit $S \subseteq T$, dann gilt $S = T$).*

(iii) *S ist eine minimale Spannmenge von V (also ist $T \subseteq V$ so dass $\operatorname{span}(T) = V$ und $T \subset S$, dann gilt $S = T$).*

Definition 5.29: *Sei V ein Vektorraum über K. Die Kardinalzahl einer (und daher auch jeder) Basis von V heisst die* **Dimension** *von V, geschrieben $\dim_K V$. Ist K aus dem Kontext klar, so schreiben wir auch einfach $\dim V$.*
V ist ein **endlich dimensionaler** *Vektorraum g.d.w. $\dim V = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.*

Beispiel 5.30:

(i) $\dim_K K^n = n$ für einen Körper K.

(ii) $\dim_K \operatorname{Mat}_{m \times n}(K) = mn$ für einen Körper K.

(iii) $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Pol}_n(\mathbb{R}) = n + 1$.

Satz 5.31: *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Ist W ein Unterraum von V, dann ist auch W endlichdimensional mit $\dim W \leq \dim V$. Weiters ist $\dim W = \dim V$ g.d.w. $W = V$.*

Satz und Definition 5.32: *Sei V ein Vektorraum über K. Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation in V, welche sowohl mit der Addition als auch mit der Skalarmultiplikation verträglich ist, also*

$$\forall v_1, v_2, v_3 \in V \; \forall \lambda \in K : \; v_1 \sim v_2 \Longrightarrow (v_1 + v_3 \sim v_2 + v_3) \text{ und } (\lambda v_1 \sim \lambda v_2) \, .$$

Definiert man auf der Faktormenge $V/\sim = \{K(v) | v \in V\}$ die Operationen

$$K(v) + K(v') := K(v + v') \quad \text{und} \quad \lambda K(v) := K(\lambda v) \, ,$$

so ist dies wohldefiniert und macht $V/\sim$ zu einem Vektorraum über K. Dieser Vektorraum heisst der **Faktorraum** *von V nach $\sim$.*

Jeder Unterraum W von V erzeugt in V die Äquivalenzrelation $v_1 \sim_W v_2 \Longleftrightarrow v_1 - v_2 \in W$. Diese ist verträglich mit Addition und Skalarmultiplikation. Der Faktorraum $V/\sim_W$ wird dann geschrieben als $V/_W$ und heisst **Faktorraum von V nach dem Unterraum** W. *Die Äquivalenzklasse von $v \in V$ bzgl. $\sim_W$ ist also*

$$v + W = \{v + w \mid w \in W\}$$

und heisst eine **lineare Mannigfaltigkeit**.

Beispiel 5.33: Sei $Ax = b$ ein System von m linearen Gleichungen in n Variablen über dem Körper K. Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems bildet einen Unterraum L von K^n. Sei $a \in K^n$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Dann ist die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems von der Form

$$a + L\ ,$$

also eine lineare Mannigfaltigkeit in K^n. □

Satz 5.34: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und seien U, W Teilräume von V, und sei*

$$T := \{u + w \mid u \in U, w \in W\}\ .$$

Dann ist $T = \mathrm{span}(U \cup W)$, also ein Teilraum von V.

Definition 5.35: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und seien U, W Teilräume von V. Dann ist die* **Summe** $U + W$ *der Teilraum bestehend aus Elementen von V der Form $u + w$, wobei $u \in U, w \in W$; also*

$$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}\ .$$

Diese Summe ist eine **direkte Summe**, $U \bigoplus W$, *wenn jedes $v \in U + W$ eine eindeutige Darstellung $v = u + w$ mit $u \in U, w \in W$ hat.*

Satz 5.36: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und seien U, W Teilräume von V. Wenn $U + W = V$ und $U \cap W = \{0\}$, dann ist $V = U \bigoplus W$.*

Satz 5.37: *Sei V ein Vektorraum über dem Körper K, und sei U ein Teilraum von V. Dann gibt es einen Teilraum W von V sodass $V = U \bigoplus W$.*

Beispiel 5.38: Der laut Satz 5.37 existierende Teilraum W ist in keiner Weise eindeutig. Ist etwa V der Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$, und U der Teilraum $\{(u, 0) \mid u \in \mathbb{R}\}$, so ist jeder eindimensionale Teilraum von V, welcher von U verschieden ist, ein Beispiel für W. □

Satz 5.39: *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über dem Körper K, und seien U, W Teilräume von V mit $V = U \bigoplus W$. Dann gilt $\dim(V) = \dim(U) + \dim(W)$.*

Natürlich können wir die (direkte) Summe von Vektorräumen nicht nur für zwei Summanden bilden, sondern bzgl. einer beliebigen Indexmenge. Sei I eine (Index-)Menge, und seien $\{V_i \mid i \in I\}$ Teilräume des Vektorraums V. Dann ist die Summe all dieser Teilräume definiert als

$$\sum_{i \in I} V_i := \mathrm{span}\left(\bigcup_{i \in I} V_i\right)\ .$$

Also $v \in \sum_{i \in I} V_i$ g.d.w. es Indizes $i_1, \ldots, i_n \in I$ gibt und $v_{i_1} \in V_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \in V_{i_n}$, sodass

$$v = v_{i_1} + \cdots + v_{i_n} \ .$$

Ist jede solche Darstellung eindeutig, dann sprechen wir von der direkten Summe dieser Vektorräume, also

$$\bigoplus_{i \in I} V_i \ .$$

Im folgenden wollen wir eine weitere Möglichkeit betrachten, Vektorräume aus bereits vorhandenen zu konstruieren, nämlich das Produkt von Vektorräumen. Dazu bilden wir das kartesische Mengenprodukt und überzeugen uns, dass dabei wiederum ein Vektorraum entsteht.

Satz 5.40: *Seien U und W zwei Vektorräume über demselben Körper K. Dann bildet das kartesische Mengenprodukt $U \times W$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation wiederum einen Vektorraum über K.*

Definition 5.41: *Seien U und W zwei Vektorräume über demselben Körper K. Dann heisst der Vektorraum $U \times W$ über K mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation das* **Produkt** *von U und W. Wir schreiben das Produkt als $U \times W$.*

Beispiel 5.42: Ist K ein Körper, und sind p, q, r positive natürliche Zahlen mit $p = q + r$, so ist der Vektorraum K^p das direkte Produkt von K^q und K^r. Streng genommen ist K^p nicht “gleich” sondern nur “isomorph” (also gleichförmig) zu $K^q \times K^r$. Darüber sprechen wir aber erst im nächsten Kapitel. □

Satz 5.43: *Seien U und W zwei endlich dimensionale Vektorräume über demselben Körper K. Dann gilt* $\dim(U \times W) = \dim(U) + \dim(W)$.

Ebenso wie bei der Summe von Vektorräumen lässt sich das Produkt natürlich auch definieren für mehr als zwei Faktoren. Sei I eine (Index-)Menge, und seien $\{U_i \mid i \in I\}$ Vektorräume über K. Dann ist das Produkt all dieser Vektorräume definiert als

$$\prod_{i \in I} V_i \ := \ \times_{i \in I} V_i \ .$$