

12 Konvexe Mengen

In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem Euklidischen Raum \mathbb{R}^n . Dieser Euklidische Raum ist ein Vektorraum über dem Körper \mathbb{R} und er ist ausgestattet mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle x|y \rangle$. Daraus erhalten wir auch die kanonische Norm $\|x\|$.

Definition 12.1: Eine Teilmenge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **konvex** gdw.

$$\forall P, Q \forall t : [P, Q \in S \wedge t \in \mathbb{R} \cap [0, 1] \implies (1-t)P + tQ \in S] .$$

Also mit zwei Punkten P und Q enthält S auch die Strecke \overline{PQ} . □

Satz 12.2: Der Durchschnitt $S \cap T$ konvexer Mengen S, T ist konvex.

Das gilt übrigens auch für beliebige Indexmengen I : Ist jedes S_i kompakt, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} S_i$ kompakt.

Satz 12.3: Seien $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen die Punktmenge

$$KH(P_1, \dots, P_m) := \{t_1 P_1 + \dots + t_m P_m \mid 0 \leq t_i \leq 1, t_1 + \dots + t_m = 1\}$$

die Menge der beschränkten Linearkombinationen.

- (i) Die Menge der beschränkten Linearkombinationen $KH(P_1, \dots, P_m)$ ist eine konvexe Menge.
- (ii) Jede konvexe Menge, welche P_1, \dots, P_m enthält, enthält auch die Menge der beschränkten Linearkombinationen $KH(P_1, \dots, P_m)$.
- (iii) Die Menge der beschränkten Linearkombinationen $KH(P_1, \dots, P_m)$ ist die kleinste konvexe Menge, welche die Punkte P_1, \dots, P_m enthält.

Aufgrund dieses Satzes versehen wir diese Menge der beschränkten Linearkombinationen mit einem besonderen Namen.

Definition 12.4: Seien $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{R}^n$. Die Menge (der beschränkten Linearkombinationen)

$$KH(P_1, \dots, P_m) = \{t_1 P_1 + \dots + t_m P_m \mid 0 \leq t_i \leq 1, t_1 + \dots + t_m = 1\}$$

heißt die **konvexe Hülle** der Punkte P_1, \dots, P_m .

Satz 12.5: Sei $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung.

- (i) Falls S konvex ist in \mathbb{R}^m , dann ist $f(S)$ konvex in \mathbb{R}^n .
- (ii) Falls T konvex ist in \mathbb{R}^n , dann ist $f^{-1}(T)$ konvex in \mathbb{R}^m .

Beispiel 12.6: (i) Sei $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Die Abbildung

$$f(x_1, \dots, x_n) = \langle a|x \rangle = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

ist linear von \mathbb{R}^m nach \mathbb{R} . Ein Punkt $c \in \mathbb{R}$ ist offensichtlich konvex. Somit ist also auch die Hyperebene

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a|x \rangle = c\}$$

eine konvexe Menge.

(ii) Das Intervall $[c, \infty)$ ist konvex in \mathbb{R} . Somit ist auch die Menge

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \langle a|x \rangle \geq c\}$$

konvex. Wir sprechen von einem **abgeschlossenen Halbraum**. Ebenso ist natürlich auch

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \langle a|x \rangle > c\}$$

konvex und heisst ein **offener Halbraum**. Genauso erzeugen die Relationen \leq und $<$ abgeschlossene und offene Halbräume. Für $n = 1$ sprechen wir von Halbebenen. \square

Eine Hyperebene mit Gleichung $\langle a|x \rangle = c$ bestimmt also 2 abgeschlossene Halbräume mit definierenden Ungleichungen

$$\langle a|x \rangle \geq c \quad \text{und} \quad \langle a|x \rangle \leq c .$$

Ebenso bestimmt diese Hyperebene auch 2 offene Halbräume mit definierenden Ungleichungen

$$\langle a|x \rangle > c \quad \text{und} \quad \langle a|x \rangle < c .$$

Da der Durchschnitt konvexer Mengen konvex ist, ist jeder Durchschnitt endlich vieler (offener oder abgeschlossener) Halbräume wieder konvex. Ein solcher endlicher Durchschnitt von Halbräumen kann beschränkt oder unbeschränkt sein (eine Teilmenge S von \mathbb{R}^n ist **beschränkt** gdw. es ein $c \in \mathbb{R}^+$ gibt mit $\|x\| \leq c$ für alle $x \in S$).

Im folgenden werden wir allgemein über offene und abgeschlossene Mengen sprechen wollen. Dieser Begriff gehört in die Topologie. Hier geben wir nur eine Definition für den Euklidischen Raum \mathbb{R}^n .

Definition 12.7: Sei S eine Teilmenge von \mathbb{R}^n . S heisst **offen**, wenn es zu jedem Punkt $x \in S$ eine Kugel $K_c(x) = \{y \mid \|x - y\| \leq c\}$ (mit $c \in \mathbb{R}^+$) gibt, welche vollständig in S enthalten ist. Ist $S \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, so heisst das Komplement von S , also $\mathbb{R}^n \setminus S$, **abgeschlossen**. Der **Rand** von S ist die Menge

$$\{x \mid \forall c \in \mathbb{R}^+ : K_c(x) \cap S \neq \emptyset \wedge K_c(x) \not\subseteq S\} ,$$

also die Menge derjenigen Punkte x , für welche jede Kugel um x sowohl S als auch das Komplement von S schneidet. \square

Beispiel 12.8: In \mathbb{R} ist das Intervall $(0, 1)$ offen, sein Komplement $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$ also abgeschlossen.

In \mathbb{R}^3 ist die Menge $\{x \mid \|x\| \neq 1\}$ offen, ihr Komplement (die Kugeloberfläche) daher abgeschlossen. \square

Satz 12.9: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei T diejenige Teilmenge von \mathbb{R}^n , welche aus allen Grenzwerten von Folgen in S besteht. Dann ist T die kleinste abgeschlossene Menge, welche S enthält.

Definition 12.10: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$, und sei T die Teilmenge von \mathbb{R}^n , welche aus allen Grenzwerten von Folgen in S besteht. Dann heisst T der **Abschluss** von S .

Satz 12.11: Der Abschluss einer konvexen Menge S ist ebenfalls konvex.

Unterstützende Hyperebenen

Satz 12.12: Sei S eine abgeschlossene konvexe Menge in \mathbb{R}^n und sei $P \in \mathbb{R}^n$. Dann liegt entweder P in S , oder es gibt eine Hyperebene H , sodass $P \in H$ und S in einer der durch H erzeugten offenen Halbräume von \mathbb{R}^n enthalten ist.

Definition 12.13: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ und sei P ein Punkt im Rand von S . Die Hyperebene H ist eine **unterstützende Hyperebene** von S bei P gdw. $P \in H$ und S ist enthalten in einer der beiden von H erzeugten abgeschlossenen Halbräume.

Satz 12.14: Sei S eine konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n und sei P ein Punkt im Rand von S . Dann gibt es eine unterstützende Hyperebene von S bei P .

Satz 12.15: Sei S eine konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n . Sei $H = \{y \mid \langle N|y \rangle = a\}$ eine Hyperebene, sodass $\langle N|x \rangle \geq a$ für alle $x \in S$ (S liegt also ganz in einem von H erzeugten Halbraum). Liegt ein Punkt P sowohl in S als auch in H , dann liegt P im Rand von S und H ist eine unterstützende Hyperebene von S bei P .

Extrempunkte

Definition 12.16: Sei S konvex in \mathbb{R}^n und sei $P \in S$. P heisst **Extrempunkt** von S gdw. es keine verschiedenen Punkte $Q_1, Q_2 \in S$ gibt, sodass P geschrieben werden kann als

$$P = tQ_1 + (1-t)Q_2 \quad \text{für } 0 < t < 1$$

(P kann nur dann auf einem Geradensegment in S liegen, wenn es ein Endpunkt dieses Segments ist).

Satz 12.17: Sei S eine beschränkte abgeschlossene konvexe Teilmenge von \mathbb{R}^n . Dann enthält jede unterstützende Hyperebene von S einen Extrempunkt.

Wie in Satz 12.3 kann man für eine beliebige Teilmenge S von \mathbb{R}^n zeigen, dass die Menge aller beschränkten Linearkombinationen von Punkten in S eine konvexe Menge ist. Das ist natürlich somit die kleinste konvexe Menge, welche S enthält.

Definition 12.18: Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Menge (der beschränkten Linearkombinationen)

$$KH(S) = \{t_1P_1 + \dots + t_mP_m \mid P_1, \dots, P_m \in S, 0 \leq t_i \leq 1, t_1 + \dots + t_m = 1\}$$

heisst die **konvexe Hülle** der Menge S .

Satz 12.19: (Krein-Milman) Sei S eine abgeschlossene beschränkte konvexe Menge in \mathbb{R}^n . Dann ist S die konvexe Hülle seiner Extrempunkte.

Konvexe Menge und die Bestimmung von Extrempunkten spielen eine wichtige Rolle in vielen Gebieten der Mathematik, etwa in der linearen Optimierung (Simplex-Verfahren) und in der Computational Geometry (Voronoi-Diagramme).