Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
9. Übungsblatt für den 8. 6. 2015

1. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Zeigen Sie: A ist diagonalisierbar über $\mathbb{C}$ aber nicht über $\mathbb{R}$.

2. Es sei $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$ ein linearer Operator mit der Eigenschaft
$$f^2 \circ (\mathrm{id} - f) = f \circ (\mathrm{id} - f)^2 = 0.$$
Zeigen Sie, dass f idempotent ist.

3. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V < \infty$ und $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$ ein nilpotenter linearer Operator. Zeigen Sie, dass die Spur von f gleich 0 ist.

4. Sei $\dim V < \infty$ und $f \in \operatorname{Hom}_K(V, V)$. Zeigen Sie, dass V in eine direkte Summe $V = U \oplus W$ f-invarianter Teilräume zerlegt werden kann, so, dass $f|U$ invertierbar und $f|W$nilpotent ist.

   Anleitung: Betrachten Sie die Folgen $\ker(f^k)$ *und* $\operatorname{im}(f^k)$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Gegeben sind die $n \times n$-Matrizen A und B. Zeigen Sie:
   Wenn die Matrizen $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ ähnlich sind, dann sind A und B ähnlich.

6. Berechnen Sie eine Jordan-Basis zur Matrix
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. (a) Gegeben sind die Polynome
$$\begin{aligned} f &= (x-3)^2(x-2)(x-1)^3 \\ g &= (x-3)(x-2)(x-1)^2. \end{aligned}$$
   Bestimmen Sie eine Matrix deren charakteristisches Polynom gleich f und deren Minimalpolynom gleich g ist.

   (b) Berechnen Sie eine Jordan-Normalform der Matrix
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

8. Es sei V der Lösungsraum der Differentialgleichung

$$y^{(3)} + y'' - 5y' + 3y = 0$$

und g die lineare Abbildung

$$g(y) = y^{(4)} - y^{(3)} + y'' - y' + y.$$

(a) Zeigen Sie, dass V g-invariant ist.

(b) Berechnen Sie eine Jordan-Normalform für den linearen Operator $g\colon V \longrightarrow V$.