Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
7. Übungsblatt für den 18. 5. 2015

1. (a) Finden Sie (wenn möglich) jeweils eine Bilinearform f mit folgenden Eigenschaften:
   - f ist sowohl symmetrisch als auch schief-symmetrisch und nicht die Nullabbildung.
   - f ist weder symmetrisch noch schief-symmetrisch.
   - f ist nicht in eine Summe einer symmetrischen und einer schief-symmetrischen Matrix zerlegbar.
   - f ist in eine Summe einer symmetrischen und einer schief-symmetrischen Matrix zerlegbar aber nicht eindeutig.

   (b) Zerlegen Sie weiters die Bilinearform $f(x, y) = x_1y_1 + x_2y_1 + x_3y_1 + x_1y_2+x_2y_3+x_3y_3$ in die Summe einer symmetrischen und einer schief-symmetrischen Bilinearform und geben Sie die Darstellungsmatrizen der beiden Formen an.

2. Zeigen Sie Satz 10.35(ii) für $n = 2$.

3. Finden Sie jeweils eine Matrix P, sodass P^TAP eine Diagonalmatrix ist, auf deren Diagonale nur die Werte ± 1 und 0 vorkommen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Gegeben sei die Bilinearform $f(x, y) = xBy^T$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -3 & 9 & -2 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Finden Sie eine symmetrische Bilinearform g, sodass $g(x, x) = f(x, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie die Darstellungsmatrix der zu g gehörenden quadratischen Form q an, erstellen Sie die kanonische Form und berechnen Sie den Rang, den Index sowie die Signatur.

5. Gegeben sei die Abbildung $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, mit $p(x, y) = 4x^4 + x^2y^2 - 2xy^3 + 2y^4$. Zeigen Sie, dass $p(x, y) > 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
   Hinweis: Erstellen Sie eine quadratische Form $q(a, b, c)$, sodass $q(x^2, y^2, xy) = p(x, y)$ und finden Sie deren kanonische Form.

6. Finden Sie eine 2×2-Matrix, die negativ semidefinit, aber nicht negativ definit ist. Geben Sie die Definitheit der folgenden Matrizen (in Abhängigkeit von a) an.

$$A_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

7. Sei $F : \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{Pol}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. Zeigen Sie, dass F eine Bilinearform ist. Berechnen Sie weiters Rang, Index und Signatur der zu F gehörenden quadratischen Form.

8. Bestimmen Sie jeweils die Definitheit der 2×2-Matrix A mit

   (a) zwei positiven Eigenwerten.

   (b) zwei negativen Eigenwerten.