Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
6. Übungsblatt für den 11. Mai 2015

1. Verwenden Sie das Skalarprodukt aus Beispiel 9.19(b). Bestimmen Sie die Winkel zwischen den Funktionen x, x^2, e^x.

2. (a) Sei $E = \{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (mit dem kanonischen Skalarprodukt). Bestimmen Sie Basen von $E^\perp$, $(E^\perp)^\perp$, $((E^\perp)^\perp)^\perp$, $(((E^\perp)^\perp)^\perp)^\perp$, ... sowie $\varnothing^\perp$ und $(\varnothing^\perp)^\perp$.

   (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Für jede Teilmenge E eines endlichdimensionalen inneren Produktraumes gilt
$$E^\perp = \operatorname{span}(E)^\perp.$$

3. Sei A eine $m \times n$-Matrix mit den Zeilen $z_1, ..., z_m$, und sei $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$.

   (a) Zeigen Sie
$$N = \{z_1, ..., z_m\}^\perp,$$
   (mit dem kanonischen Skalarprodukt).

   (b) Wie kann man eine Basis von $\operatorname{span}(\{z_1, ..., z_m\}$ finden, wenn eine Basis von N gegeben ist?

4. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung die durch
$$\begin{pmatrix}3\\5\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\5\\1\end{pmatrix}$$
   aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit ist.

5. Es sei $U_1 = \operatorname{span}(\begin{pmatrix}4\\7\\8\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\9\\1\end{pmatrix})$ und $U_2 = \operatorname{span}(\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\6\\13\end{pmatrix})$. Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

6. Zeigen Sie für Satz 9.49 die Äquivalenz von (ii) mit (iii). D.h.: Sei V ein endlichdimensionaler innerer Produktraum, B eine Orthonormalbasis von V, und $h \in \operatorname{Hom}(V, V)$. Dann ist h genau dann ein innerer Produktisomorphismus, wenn die Darstellungsmatrix von h bzgl. B orthogonal ist.

7. Verwenden Sie die Basen
$$B_1 = \{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\} \text{ und } B_2 = \{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\}$$
   um gemäß Satz 10.10 eine Basis von $\operatorname{Mult}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3)$ zu konstruieren, und bestimmen Sie, die multilineare Abbildung f, welche bezüglich dieser Basis die Koordinaten $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ hat. Es reicht, wenn Sie $f(x, y)$ an zumindest so vielen Stellen bestimmen, dass f damit eindeutig festgelegt ist.

8. Sind die Matrizen
$$\begin{pmatrix}0.362 & 0.932\\-0.932 & 0.362\end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix}-0.505 & 0.683\\-0.683 & -0.505\end{pmatrix}$$
   Rotationsmatrizen?