Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
5. Übungsblatt für den 27. April 2015

1. Wir betrachten die von den Richtungsvektoren $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ 15 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene sowie die Abbildung h, welche jeden Vektor in sein Spiegelbild an dieser Ebene überführt. Wählen Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^3$, sodass Sie die folgenden Aufgaben möglichst einfach lösen können:
   (a) Geben sie eine anschauliche Begründung, warum h linear ist.
   (b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix A von h bezüglich B.
   (c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A sowie deren Vielfachheiten.
   (d) Bestimmen Sie die Eigenräume von A.
   (e) Bestimmen Sie die Determinante von A.
   (f) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A.
   (g) Bestimmen Sie die Eigenwerte, die Determinante und die Spur der Abbildungsmatrix von h bezüglich der kanonischen Basis.

2. Wir betrachten den reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Sei $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$, und $U = \operatorname{span}(B)$. Zeigen Sie, dass B eine Orthonormalbasis von U ist.

3. Sei $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Bestimmen Sie die Fourierentwicklung von v bezüglich der Orthonormalbasis B von U aus Aufgabe 2.
   (b) Welcher Vektor von U liegt am nächsten bei v?

4. Wir betrachten die folgenden Teilräume des Raums der stetigen Funktionen auf dem Einheitsintervall, mit dem Integral als Skalarprodukt (vgl. Beispiel 9.18(b)). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei U_n der Raum aller Polynome höchstens n-ten Grades. Bestimmen Sie, für $n \in \mathbb{N}$ jenes Polynom in U_n, welches den minimalen Abstand zu e^x hat

5. Sei $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt. Verwenden Sie den Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozess, um daraus eine Orthonormalbasis zu konstruieren. Erstellen Sie auch eine Skizze mit allen dabei auftretenden Vektoren, um den Vorgang auch geometrisch erläutern zu können.

6. Wir betrachten den Vektorraum P der Polymome in t vom Grad höchstens 2 und dem Skalarprodukt
$$\langle p \mid q \rangle := \int_a^b pq,$$
und darin die Basis $B = (1,\, t,\, 2t^2 - 1)$.
   (a) Verwenden Sie den Gram-Schmidt Orthonormalisierungsprozess, um aus B eine Orthonormalbasis E von P zu konstruieren.
   (b) Bestimmen Sie eine Basistransformationsmatrix zwischen B und E.

7. Sei V ein innerer Produktraum. Zeigen oder widerlegen Sie, dass für alle $v, w \in V$ gilt:
   (a) $\|v\| = \|w\| \implies v = w$;

(b) $\langle v + w \mid v + w \rangle = \|v\|^2 + 2\langle v \mid w \rangle + \|w\|^2$;

(c) $\langle v + w \mid v - w \rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$;

(d) $\|v - w\| \leq \|v\| + \|w\|$;

(e) $d(v, w) = 0 \iff v = w$.

8. Sei V ein innerer Produktraum über $\mathbb{C}$. Zeigen oder widerlegen Sie, dass für jedes $v \in V$ die Abbildung $\alpha_v : V \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$\alpha_v(x) = \langle x \mid v \rangle,$$

ein Element des Dualraums V^* ist.