Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
4. Übungsblatt für den 20. 4. 2015

Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : y_{n+2} = \frac{12y_{n+1}y_n - 17y_n - 30}{y_n y_{n+1}}, \quad y_0 = 1, y_1 = 5.$$

(Die Folge würde abbrechen, sobald der Wert Null erreicht wird - das geschieht allerdings nicht.) Die ersten 5 Beispiele drehen sich um diese Folge.

1. (a) Man berechne numerisch die ersten 50 Folgenglieder.
   (b) Man berechne numerisch die ersten 50 Folgenglieder mit einer höheren Genauigkeit und vergleiche die Resultate.

2. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist definiert durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+3} = 12x_{n+2} - 17x_{n+1} - 30x_n, \quad x_0 = 1, x_1 = 1, x_2 = 5.$$

   Man zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

3. Es sei A die 3×3–Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -17 & 12 \end{pmatrix}$. Es sei $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Vektoren definiert durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} = Av_n, \quad v_0 = (1, 1, 5)^t.$$

   Man zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $v_n = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2})^t$.

4. (a) Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A aus Beispiel 3.
   (b) Man stelle den Vektor $v_0 = (1, 1, 5)^t$ als Summe von Eigenvektoren dar.

5. (a) Man bestimme die Grenzwerte der Folgen $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Man erkläre, warum die numerische Berechnung der ersten 50 Folgenglieder von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht zum Grenzwert geführt hat.
   (c) Würde eine Vergrößerung der Genauigkeit oder eine Erhöhung der Anzahl der berechneten Glieder zum Grenzwert führen?

6. Auf dem Vektoraum $\mathrm{Pol}_3(\mathbb{R})$ der reellen Polynome über $\mathbb{R}$ in x sei das innere Produkt

$$\langle p \mid q \rangle := \int_0^1 pq$$

   definiert. Man berechne eine Basis für den Unterraum der Polynome, die normal auf $p_1 = 1$ und auf $p_2 = x$ stehen.

7. Es sei $V = \mathbb{R}^2$. Ist die Abbildung

$$V^2 \to \mathbb{R}, ((v_1, v_2)^t, (w_1, w_2)^t) \mapsto v_1w_1 + 2v_1w_2 + 2v_2w_1 + 3v_2w_2$$

   ein inneres Produkt?

8. Es sei $V = \mathbb{R}^2$. Man gebe notwendige und hinreichende Bedingungen für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ an, sodaß die Abbildung

$$V^2 \to \mathbb{R}, ((v_1, v_2)^t, (w_1, w_2)^t) \mapsto av_1w_1 + bv_1w_2 + cv_2w_1 + dv_2w_2$$

ein inneres Produkt ist.