Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
3. Übungsblatt für den 23. 3. 2015

1. Bestimmen Sie x_2 mit der Cramerschen Regel.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie die Eigenwerte über $\mathbb{R}$ mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit. Diagonalisieren Sie falls möglich.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 9 & 2 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Sei $r_\varphi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Rotation um den Koordinatenursprung um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn.

   (a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $A(r_\varphi, E_2, E_2)$ bezüglich der kanonischen Basis E_2 von $\mathbb{R}^2$.

   (b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von r_φ über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$.

   (c) Diagonalisieren Sie $A(r_\varphi, E_2, E_2)$ über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ falls möglich.

4. Sind Matrizen mit identischem charakteristischen Polynom ähnlich? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

5. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ eine Matrix über $\mathbb{C}$ mit Eigenwerten λ_1, λ_2 (mit algebraischer Vielfachheit gezählt).

   Zeigen Sie

   (a) $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det A$

   (b) $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$

6. Zeigen Sie für jede $n \times n$-Matrix A über $\mathbb{C}$:

   (a) Das Produkt aller Eigenwerte (mit algebraischer Vielfachheit) von A ist gleich der Determinante von A.

   (b) Die Summe aller Eigenwerte (mit algebraischer Vielfachheit) von A ist gleich der Spur von A (d.h., der Summe der Diagonalelemente von A).

   (Hinweis: Betrachten Sie die Zerlegung von $c_A(\lambda)$ in Linearfaktoren.)

   Falls Sie dieses Beispiel ankreuzen, geben Sie Ihren Beweis bitte in der Übung ab.

7. Bestimmen Sie die explizite Lösung der Rekursion

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

mit Anfangswerten $a_0 = 1, a_1 = 1$.

8. In einer Population breitet sich eine Epidemie aus. Jeden Tag infizieren sich 20 Prozent der Gesunden vom Vortag und wird die Hälfte der Kranken vom Vortag wieder gesund. Zu Beginn sind 1 Prozent der Population erkrankt.

   Berechnen Sie den Anteil der Infizierten am Tag k. Was passiert für $k \to \infty$?