Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
2. Übungsblatt für den 16. 3. 2015

1. (a) Zeigen Sie $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ für $A \in GL_n(K)$.
   (b) Zeigen Sie $\det(M) = \det(N)$ für zueinander ähnliche Matrizen M und N.
   (c) Sind die folgenden beiden 3×3–Matrizen über $\mathbb{R}$ ähnlich?

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

2. Für die 4×4–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

   über dem Körper $\mathbb{Z}_3$ berechne man:

   (a) $\det(A)$,
   (b) $\operatorname{rang}(A)$,
   (c) und – falls A regulär ist – $\det(A^{-1})$.

3. Sei A eine $n \times n$–Matrix in unterer Dreiecksform über K, d.h., $a_{ij} = 0$ für $i < j$. Zeigen Sie

$$\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$$

   (a) durch Induktion nach n.
   (b) mit Hilfe der Leibnizschen Determinantenformel.

   Entwickeln Sie eine ähnliche Formel für $n \times n$–Matrizen mit $a_{ij} = 0$ für $i+j > n+1$, also “linke obere” Dreiecksmatrizen.

4. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Spiegelung von Vektoren an der Ebene

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$

   Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von f durch geometrische Überlegungen ohne viel zu rechnen.

5. Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenräume der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

   über dem Körper $\mathbb{C}$.

6. Sei V ein endlichdim. Vektorraum über K mit Basis B. Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Zeigen Sie: $\lambda \in K$ ist ein Eigenwert von f genau dann wenn λ ein Eigenwert der Darstellungsmatrix $\mathcal{A}(f, B, B)$ ist.

   Geben Sie Ihren Beweis in der Übung Ihrem Übungsleiter ab, falls Sie diese Aufgabe ankreuzen.

7. Berechnen Sie über dem Körper $\mathbb{R}$:

   (a) die Eigenwerte von A

   (b) zu jedem Eigenwert λ den zugehörigen Eigenraum

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Sei V ein endlichdim. Vektorraum über einem Körper K, sei $\lambda \in K$ und sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{im}(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq V$ falls λ ein Eigenwert von f ist. Gilt auch die Umkehrung? *Hinweis:* Dimensionsformel.