Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
10. Übungsblatt für den 22. 6. 2015

1. (a) Es sei R ein Integritätsbereich. Zeigen Sie, dass dann auch der Polynomring $R[x]$ ein Integritätsbereich ist.
   (b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, also der Ring der multivariaten Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten, ein Integritätsbereich ist.

2. Es bezeichne K den Körper $\mathbb{Z}_7$. Finden Sie eine Polynom $f \in K[x]$, $f \neq 0$, das jedes Element von K als Nullstelle hat.

3. Gegeben sind die Polynome $f, g \in \mathbb{Q}[x]$
$$f = x^3 + x^2 + x + 1, \quad g = x^2 - x + 1.$$
Bestimmen Sie Polynome $a, b \in \mathbb{Q}[x]$ mit $af + bg = x^2 + 1$.

4. Es sei K ein beliebiger Körper. Zeigen Sie, dass im Polynomring $K[x]$ die Begriffe `prim` und `irreduzibel` äquivalent sind, dass also für beliebiges $p \in K[x]$ gilt:
$$p \text{ ist prim} \iff p \text{ ist irreduzibel.}$$

5. Berechnen Sie die Resultante der Polynome
$$\begin{aligned} p &= 2x^3 + 3x^2 + x + 4 \\ q &= x^2 + x + 2. \end{aligned}$$

6. Verwenden Sie Resultanten, um die Schnittpunkte der beiden Kurven
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}$$
zu berechnen.

7. Konstruieren Sie, analog zu Definition 13.1, den Ring der `formalen Potenzreihen` $R[[x]]$ über einem Ring R:
$$R[[x]] = \{p \mid p \colon \mathbb{N} \longrightarrow R\}.$$
Als Menge ist $R[[x]]$ gleich der Menge **aller** Funktionen von $\mathbb{N}$ nach R. (Unter den formalen Potenzreihen sind also die Polynome jene, die endlichen Support haben). Addition und Multiplikation in $R[[x]]$ sind genauso definiert wie die entsprechenden Operationen in $R[x]$. Der Ring $R[[x]]$ ist also ein `Erweiterungsring` des Polynomrings $R[x]$.

   Wir schreiben eine formale Potenzreihe $p \in R[[x]]$ als
$$p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$$

wobei der Koeffizient p_k den Funktionswert der Funktion $p\colon \mathbb{N} \longrightarrow R$ darstellt (also $p_k = p(k)$), und das Summenzeichen als formales Symbol zu verstehen ist.

Zeigen Sie, dass $R[[x]]$ ein Integritätsbereich ist, wenn R ein solcher ist.

8. Sei K ein Körper, und $K[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über K. Zeigen Sie:

   (a) Ein Element $a = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \in K[[x]]$ ist invertierbar in $K[[x]]$ genau dann wenn $a_0 \neq 0$. (Dass a invertierbar ist, bedeutet, dass es ein $b \in K[[x]]$ gibt mit $a \cdot b = 1$. Für dieses b schreiben wir $b = a^{-1}$ oder auch $b = \frac{1}{a}$.)

   (b) Es sei $p \in \mathbb{R}[x]$ das Polynom $p = 1 - x$. Berechnen Sie p^{-1} im Ring $\mathbb{R}[[x]]$.