Übungen zu
Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2
1. Übungsblatt für den 9. 3. 2015

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathrm{Pol}_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$\varphi : V \to \mathbb{R},$$
$$p \mapsto \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,p(x)dx$$
ein Element von V^* ist.

2. Sei V ein Vektorraum. Zeigen Sie:
   (a) Für jedes $v \in V$ mit $v \neq 0$ existiert ein $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v) \neq 0$.
   (b) Für $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$ existiert ein $\varphi \in V^*$ mit $\varphi(v_1) \neq \varphi(v_2)$.

   Der Beweis ist schriftlich auszufertigen. Bitte geben Sie Ihren Beweis in der Übung Ihrem Übungsleiter ab, falls Sie diese Aufgabe ankreuzen.

3. Sei $f : \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_2$, $f(x, y, z) = (x+y, x-y+z)$. Gegeben sind Basen $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $C = (c_1, c_2)$ von $\mathbb{R}_3$ und $\mathbb{R}_2$, wobei $b_1 = (3, 0, -2)$, $b_2 = (-5, 1, 3)$, $b_3 = (-1, 0, 1)$, $c_1 = (5, 3)$, und $c_2 = (2, 1)$ Berechnen Sie:
   (a) $\mathcal{A}^B_E$ und $\mathcal{A}^E_B$
   (b) $\mathcal{A}^C_{E'}$ und $\mathcal{A}^{E'}_C$
   (c) $\mathcal{A}(f, E, E')$ und $\mathcal{A}(f, B, C)$
   (d) $(f(b_1 + b_3))_C$

   E und E' bezeichnen die kanonischen Basen von $\mathbb{R}_3$ und $\mathbb{R}_2$.

4. Sei $b_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $b_k(x) := x^k e^x$ definiert für $k \in \{0, 1, 2\}$. Ein Teilraum V wird im Vektorraum $C^\infty(\mathbb{R})$ aller glatten (d.h. beliebig of stetig differenzierbaren) Funktionen von (den linear unabhängigen Funktionen) b_0, b_1, b_2 aufgespannt. $B := (b_0, b_1, b_2)$.
   (a) Zeigen Sie $d(V) \subseteq V$.
   (b) Berechnen Sie $\mathcal{A}(d, B, B)$.
   (c) Bestimmen Sie $\ker(d)$ und $\mathrm{im}(d)$.

   ($d : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ bezeichnet die Ableitung.)

5. *(Fortsetzung der vorangehenden Aufgabe)*
   (a) Ist $d : V \to V$ ein Automorphismus?
   (b) Falls ja, so berechnen Sie $\mathcal{A}(d^{-1}, B, B)$
   (c) und eine Stammfunktion von $x \mapsto (1 + x^2)e^x$.

6. Seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ zwei Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, 5\}$.

   (a) Bestimmen Sie die Fehlstellen und die Signaturen von σ und τ.

   (b) Zerlegen Sie σ und τ in Produkte von Transpositionen.

   (c) Berechnen Sie $\tau \circ \sigma$.

7. Sei $D : \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Determinantenfunktion. Berechnen Sie

   (a) $D(e_3, e_1, e_2)$,

   (b) $D(2e_3 - e_2, 5e_1, 3e_1 + 2e_2)$

   nur mit Hilfe der Eigenschaften (D1), (D2), (D3') und (D4). (Siehe Definition 7.1).

8. Zeigen Sie: Erfüllt eine Funktion $D : \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ die Eigenschaften (D1), (D2), (D3') und (D4), so muss sie auch (D3) erfüllen.