Satz 11.4 (Primärdekomposition): *Sei V ein vom Nullraum verschiedener endlichdimensionaler Vektorraum über K und sei $f : V \to V$ linear. Seien das charakteristische Polynom bzw. das Minimalpolynom von f (bzw. seiner Darstellungsmatrix) von der Gestalt*

$$c_f = p_1^{d_1} p_2^{d_2} \cdots p_k^{d_k} \quad \text{bzw.} \quad m_f = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k} \ ,$$

wobei $p_1, \ldots, p_k \in K[x]$ irreduzible und paarweise relativ prime Polynome sind (also jeweils keinen gemeinsamen nicht-konstanten Faktor haben).

(i) *Dann ist jeder der Teilräume $V_i = \operatorname{kern}(p_i^{e_i}(f))$ f-invariant und es gilt $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$.*

(ii) *Sei $f_i : V_i \to V_i$ jeweils die von f auf V_i induzierte Abbildung. Dann ist $p_i^{d_i}$ das charakteristische Polynom von f_i und $p_i^{e_i}$ das Minimalpolynom von f_i.*

Beweis: ad (i): Ist $k = 1$, dann haben wir $p_1^{e_1}(f) = m_f(f) = 0$, und somit

$$V = \operatorname{kern}(p_1^{e_1}(f)) = V_1 \ .$$

Wir nehmen also nun an $k \geq 2$. Für $i = 1, \ldots, k$ sei

$$q_i := m_f / p_i^{e_i} = \prod_{j \neq i} p_j^{e_j} \ .$$

Dann haben die Polynome $q_1, \ldots, q_k$ keinen nicht-trivialen gemeinsamen Teiler (nur konstante Teiler). Aus dem erweiterten Euklidschen Algorithmus sehen wir also, dass es Polynome $a_1, \ldots, a_k \in K[x]$ gibt, sodass

$$a_1 q_1 + \cdots + a_k q_k = 1 \ . \qquad (1)$$

Wir führen die Bezeichnung $t_i := a_i q_i$ ein für $1 \leq i \leq k$. Substituieren wir nun f in die Gleichung (1), so erhalten wir

$$t_1(f) + \cdots + t_k(f) = \mathrm{id} \ . \qquad (2)$$

Für $i \neq j$ gilt $m_f | q_i q_j$, und daher $q_i(f) q_j(f) = 0$. Daraus folgt

$$t_i(f) t_j(f) = 0 \quad \forall i \neq j \ . \qquad (3)$$

Aus (2), (3) und Satz 9.38 folgt, dass jede der Abbildungen $t_i(f)$ eine Projektion ist und

$$V \ = \ \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{im}(t_i(f)) \ .$$

Wegen Satz 11.3 ist jeder der Teilräume $\operatorname{im}(t_i(f))$ f-invariant.
Wir zeigen nun, dass

$$\operatorname{im}(t_i(f)) \ = \ \operatorname{kern}(p_i^{e_i}(f)) \ .$$

Zunächst beobachten wir für jedes i:

$$\begin{aligned}
& p_i^{e_i} q_i = m_f \\
\Longrightarrow \quad & p_i^{e_i}(f) q_i(f) = m_f(f) = 0 \\
\Longrightarrow \quad & p_i^{e_i}(f) q_i(f) a_i(f) = 0 \\
\Longrightarrow \quad & \operatorname{im}(t_i(f)) \subseteq \operatorname{kern}(p_i^{e_i}(f)) \ .
\end{aligned}$$

Um die Umkehrung der Mengeninklusion zu zeigen, beobachten wir für jedes $j = 1, \ldots, k$

$$t_j(f) = a_j(f) q_j(f) = a_j(f) \prod_{i \neq j} p_i^{e_i}(f) \ .$$

Also für $i \neq j$ gilt: $\mathrm{kern}(p_i^{e_i}(f)) \subseteq \mathrm{kern}(t_j(f))$.
Daraus erhalten wir für jedes $i = 1, \ldots, k$

$$\begin{aligned}
\mathrm{kern}(p_i^{e_i}(f)) &\subseteq \textstyle\bigcap_{j \neq i} \mathrm{kern}(t_j(f)) \\
&\subseteq \mathrm{kern}\big(\textstyle\sum_{j \neq i} t_j(f)\big) \\
&= \mathrm{kern}(\mathrm{id}_V - t_i(f)) \qquad \text{(wegen (2))} \\
&= \mathrm{im}(t_i(f)) \ . \qquad \text{(wegen Satz 9.37)}
\end{aligned}$$

ad (ii): sei m_{f_i} das Minimalpolynom zu $f_i : V_i \to V_i$. Da $p_i^{e_i}(f)$ die Nullabbildung auf V_i ist, ist auch $p_i^{e_i}(f_i)$ die Nullabbildung. Also $m_{f_i} | p_i^{e_i}$. Insgesamt haben wir

$$\forall i : m_{f_i} | m_f \quad \text{und} \quad m_{f_1}, \ldots, m_{f_k} \text{ sind relativ prim.}$$

Sei $g \in K[x]$ ein Vielfaches von m_{f_i} für alle i. Dann ist natürlich $g(f_i)$ die Nullabbildung auf V_i. Für jedes

$$x \ = \ \sum_{i=1}^{k} v_i \ \in \ \bigoplus_{i=1}^{k} V_i \ = \ V$$

gilt somit

$$g(f)(x) \ = \ \sum_{i=1}^{k} g(f)(v_i) \ = \ \sum_{i=1}^{k} g(f_i)(v_i) \ = \ 0 \ .$$

$g(f)$ ist also die Nullabbildung, und daher gilt $m_f | g$. m_f ist also das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome $m_{f_1}, \ldots, m_{f_k}$. Da diese Polynome relativ prim sind, ist

$$\prod_{i=1}^{k} m_{f_i} \ = \ m_f \ = \ \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i} \ .$$

Da $m_{f_i} | p_i^{e_i}$ und alle diese Polynome monisch sind, folgt daraus schliesslich

$$m_{f_i} \ = \ p_i^{e_i} \quad \text{für alle } i = 1, \ldots, k \ .$$

Die Basen der Vektorräume V_i können (da V die direkte Summe der V_i ist, siehe oben) zu einer Basis von V zusammengefasst werden, bzgl. derer die Darstellungsmatrix von f die folgende Blockdiagonalform hat:

$$M \ = \ \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

Für die Determinante gilt (wegen Satz 7.22)

$$|xI - M| \ = \ \prod_{i=1}^{k} |xI - A_i| \ ,$$

also $c_f = \prod_{i=1}^{k} c_{f_i}$. Nun wissen wir aber, dass $m_{f_i} = p_i^{e_i}$. m_{f_i} und c_{f_i} haben dieselben Nullstellen. Daher ist $c_{f_i} = p_i^{r_i}$ für ein $r_i \geq e_i$. Aus der Beziehung

$$\prod_{i=1}^{k} p_i^{r_i} \ = \ c_f \ = \ \prod_{i=1}^{k} p_i^{d_i}$$

sehen wir nun, dass $r_i = d_i$ für alle $i = 1, \ldots, k$. $\square$